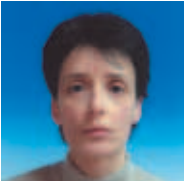


Primljen / Received: 4.10.2012.  
 Ispravljen / Corrected: 16.1.2013.  
 Prihvaćen / Accepted: 20.1.2013.

Dostupno online / Available online: 15.2.2013.

# Analitički postupak određivanja kritičnog opterećenja - patch loading

## Autori:



Doc.dr.sc. **Olga Mijušković**, dipl.ing.građ.  
 Sveučilište Crne Gore  
 Građevinski fakultet u Podgorici  
[olja\\_64@yahoo.com](mailto:olja_64@yahoo.com)



Prof.dr.sc. **Branislav Ćorić**, dipl.ing.građ.  
 Sveučilište u Beogradu  
 Građevinski fakultet  
[bcoric@grf.bg.ac.rs](mailto:bcoric@grf.bg.ac.rs)

Izvorni znanstveni rad

**Olga Mijušković, Branislav Ćorić**

## Analitički postupak određivanja kritičnog opterećenja - patch loading

Problem stabilnosti ploča pri djelovanju patch-loadinga može se analizirati primjenom različitih matematičkih modela koji ga, manje ili više, realno opisuju. Modeli usvojeni u ovom radu poslužili su kao osnova za provjeru ponašanja analitičkog rješenja u uvjetima djelovanja složenih opterećenja. Preciznost postupka, dokazana usporedbom s podacima dobivenim primjenom numeričkih metoda i ostvarena prije svega jer su uvedene točne funkcije naprezanja; te primijenjene odgovarajuće funkcije progiba, potvrdila je točnost izvedenog rješenja.

### Ključne riječi:

elastična stabilnost ploča, točna funkcija naprezanja, kombinirani rubni uvjeti, patch-loading

Original scientific paper

**Olga Mijušković, Branislav Ćorić**

## Patch loading - analytical approach to critical load determination

The problem of plate stability under patch-loading can be analyzed using a variety of mathematical models by which the problem can be more or less realistically described. Models adopted in this paper serve as the basis for checking applicability of the analytical solution when subjected to complex load conditions. The accuracy of the procedure, proven by comparison with the data obtained through numerical models, and achieved by introduction of the exact stress function and use of appropriate deflection functions, confirms correctness of the solution presented in the paper.

### Key words:

elastic stability of plates, exact stress function, mixed boundary conditions, patch loading

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

**Olga Mijušković, Branislav Ćorić**

## Analytisches Verfahren zur Bestimmung kritischer Belastungen – patch-loading

Das Stabilitätsproblem von Platten unter Belastungen in der Form von patch-loading kann durch die Anwendung verschiedener mathematischer Modelle analysiert werden, die das Problem mehr oder weniger wahrheitsgetreu darstellen. Die in der vorliegenden Arbeit angenommenen Modelle sind als Grundlage für die Untersuchung des Verhaltens der analytischen Lösung in Bezug auf kombinierte Belastungen eingesetzt worden. Die Genauigkeit des angewandten Verfahrens, die hauptsächlich durch die Einführung exakter Spannungsfunktionen und entsprechender Deformationsfunktionen erzielt werden konnte, ist durch den Vergleich mit auf numerischen Methoden beruhenden Resultaten erwiesen worden und bestätigt die Richtigkeit der dargestellten Lösung.

### Schlüsselwörter:

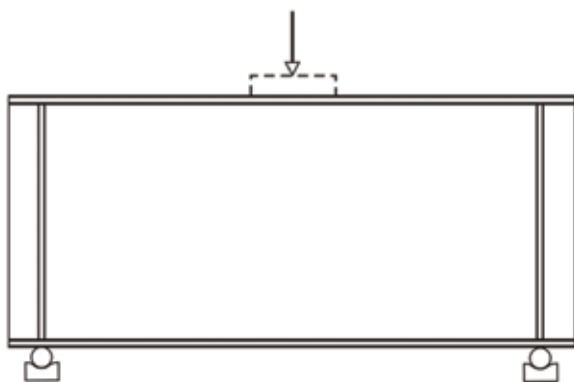
elastische Plattenstabilität, exakte Spannungsfunktion, kombinierte Randbedingungen, patch-loading

### 1. Uvod

U čeličnim konstrukcijama često su prisutni nosači čiji problem stabilnosti pod djelovanjem promjenljivog, realnog, vanjskog opterećenja i danas je veoma aktualan. Svakako, u literaturi postoji velik broj podataka i radova vezanih za taj problem, ali su oni većinom zasnovani na numeričkim i eksperimentalnim metodama, dok je klasično analitičko rješenje najčešće izbjegavano, uglavnom zbog nepoznavanja točne raspodjele naprezanja unutar ploče.

U nizu radova zasnovanih na ideji Mathieua [1] iz 1890. godine ponudili su autori Pavlović, Baker i Tahan [2], a kasnije Liu [3] i Mijušković [4], veoma precizan postupak određivanja točne raspodjele naprezanja za opći slučaj pravokutne ploče opterećene proizvoljnim vanjskim opterećenjem. Uključivanjem izvedenih rješenja stvorena je osnova za analizu veoma složenih problema stabilnosti ploča pod djelovanjem realnih vanjskih opterećenja.

Analitički postupak provjere stabilnosti pravokutnih ploča različitih rubnih uvjeta, zasnovan na točnoj funkciji naprezanja, prikazan je na relativno jednostavnom slučaju ravnomjerno raspodijeljenog (DEA) tlačnog naprezanja [3-5], gdje je potvrdio visok stupanj točnosti. U ovom radu, prikazan je sljedeći korak u navedenom postupku na zahtjevnijim problemima. Time se postupno želi dokazati preciznost i primjenljivost ne samo pod djelovanjem osnovnih, jednostavnih tipova opterećenja, već i u slučajevima veoma realnih situacija u vezi s inženjerskim konstrukcijama. U tom cilju kao konkretan primjer iz svakodnevne prakse analiziran je problem stabilnosti rebra pod djelovanjem lokalno raspodijeljenog opterećenja (patch loading) koje djeluje preko gornje nožice čeličnog nosača (slika 1.).

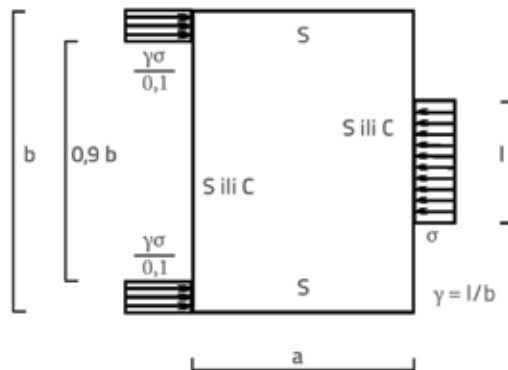


Slika 1. Model bez vertikalnih ukrućenja u polju

Slučaj patch-loadinga može se analizirati primjenom različitih matematičkih modela koji, manje ili više realno opisuju navedeni problem. Namjera je da se za odabrani slučaj, u okviru nekoliko radova, razmatraju modeli različitog stupnja složenosti s ciljem uspoređivanja dobivenih rezultata i analize doprinosa pojedinih parametara na konačnu vrijednost kritičnog opterećenja.

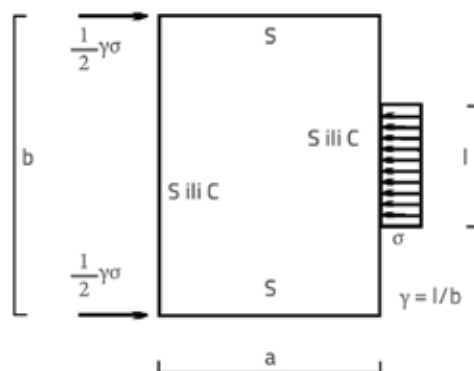
Prva dva odabrana modela koja se analiziraju u okviru ovog rada (slika 2.) dobivaju se kombinacijom osnovnih tipova opterećenja (DEA i DEB) [1-5] (slika 3.) i predstavljaju početne, bazne modele navedenog problema.

a) Usvojene pretpostavke za model 1



S - slobodno oslonjeni rub  
C - upeti rub

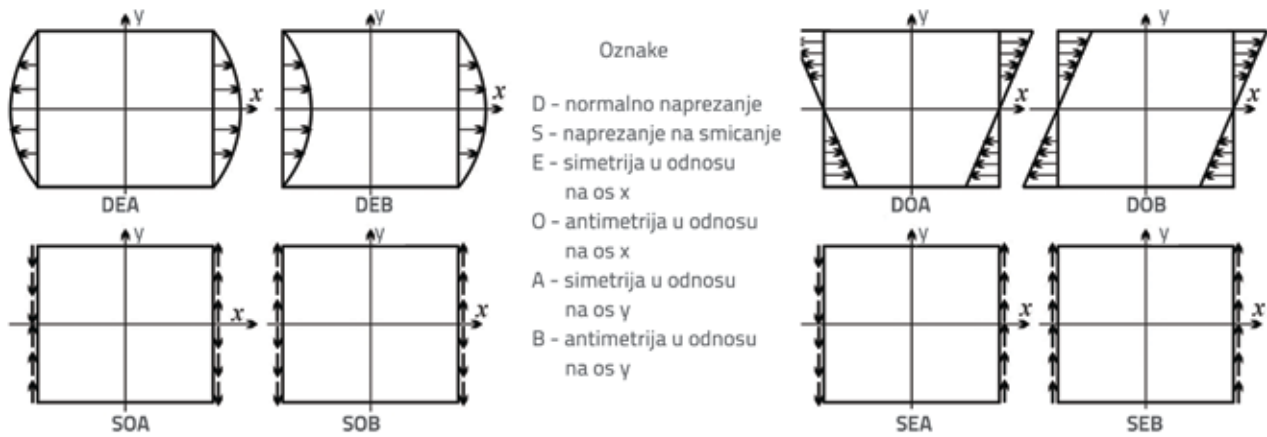
b) Usvojene pretpostavke za model 2



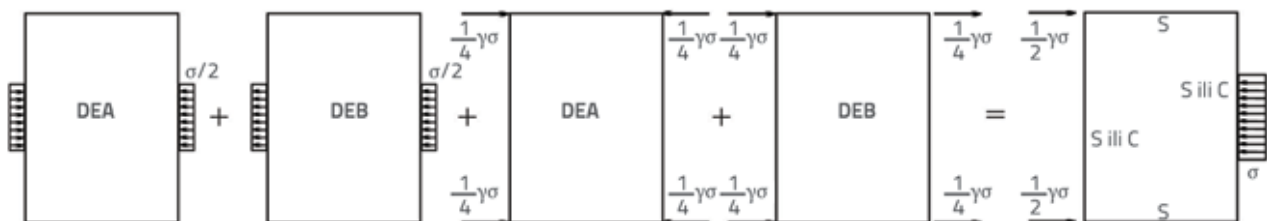
S - slobodno oslonjeni rub  
C - upeti rub

Slika 2. Početni modeli za problem patch-loadinga

Sljedeći korak podrazumijeva podizanje modela na nešto složeniju razinu prihvaćanjem tlačnog naprezanja raspodijeljenim posmičnim silama na mjestima vertikalnih ukrućenja, duž kraćih rubova (uključivanje opterećenja SEB). Posljednji korak je uključivanje posmičnih naprezanja na kontaktu nožice i rebra (opterećenje SOA), čija raspodjela ovisi o stupnju krutosti pojasnice nosača i koji predstavlja efekt koji do sada nikada nije analitički razmatran. Usporedna analiza tih četiriju modela koji opisuju problem patch-loadinga za slučajeve pravokutnih ploča različitih rubnih uvjeta može upućivati na interesantne zaključke o stupnju utjecaja pojedinih parametara na konačnu vrijednost kritičnog opterećenja.



Slika 3. Osam osnovnih tipova opterećenja



Slika 4. Postupak superpozicije osnovnih tipova opterećenja pri formiranju *modela 2*

## 2. Teorijska osnova problema

Analiza problema stabilnosti ploča uslijed patch-loadinga započinje prikazom točne funkcije naprezanja za odabrane modele. U radu [5] već je objašnjeno da se bilo koje proizvoljno opterećenje (normalno i/ili posmično) koje djeluje na rubu ploče može opisati odabranim funkcijama (parnim i/ili neparnim u odnosu na koordinatne osi), tako da se ukupno rješenje dobiva odgovarajućom kombinacijom osam osnovnih slučajeva (slika 3).

Problem koji se analizira u ovom radu dobiva se kombinacijom dvaju osnovnih tipova opterećenja (DEA) i (DEB) (slika 4.). S obzirom na to da se potvrda preciznosti funkcija koje opisuju prvi tip (DEA) može naći u radovima [3, 4, 5], težište je usmjereno na prezentaciju i provjeru drugog slučaja (DEB). Uključivanjem točne funkcije naprezanja dobivene superpozicijom rješenja za osnovna opterećenja (DEA) i (DEB), kao što je u slučaju *modela 2* prikazano na slici 4., stvoreni su uvjeti za preciznu analizu problema stabilnosti rebra različitih rubnih uvjeta uslijed djelovanja patch-loadinga. Ponovno se naglašava da su do sada u literaturi, u radovima Pavlovića i Liua [3, 6, 7] razmatrani primjeri isključivo slobodno oslonjenih ploča, dok za ploče drugačijih rubnih uvjeta nisu napravljene slične analize. U ovom radu, na primjeru dva usvojena osnovna modela, usporedbom s odabranim računalnim programima na osnovi konačnih elemenata, dokazana je izuzetna preciznost ostvarenih rezultata.

### 2.1. Mathieuovo rješenje

Iako je u literaturi moguće naći Mathieuovo rješenje [1-5] smatralo se nužnim ponoviti prikaz osnovnih izraza Mathieuove 2D teorije elastičnosti, jer se njegov pristup i notacija djelomično razlikuju od današnjih konvencija. Mathieu je poznate jednadžbe ravnoteže, bez prisutnosti zapreminskih sila, izrazio pomoću pomaka u obliku:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \Delta u = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dv}{dx} \quad (1a)$$

Mathieu  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \Delta v = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dv}{dy} \quad (1b)$$

gdje su:

- $\Delta$  - Laplasov operator
- $u, v$  - pomaci u  $x$  i  $y$  smjeru respektivno

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{- zapreminska dilatacija} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{- konstanta definirana pomoću poznatih Laméovih parametara} \quad (3)$$

Relativno jednostavnim matematičkim operacijama jednadžbe iz sustava (1) mogu se napisati u obliku:

$$\Delta v = 0 \quad (4)$$

Mathieuov pristup rješavanju problema 2D teorije elastičnosti započinje pažljivim odabirom funkcija za veličinu  $n$  (4) u obliku dva Fourierova reda s nepoznatim koeficijentima koji trebaju uvesti simetriju i antisimetriju raspodjele naprezanja u odnosu na osi  $x$  i  $y$  respektivno:

$$v = v_1 + v_2 \tag{5}$$

Sljedeći korak predstavlja uvođenje funkcije  $F$  ( $F_1 + F_2$ ) iz uvjeta da mora biti zadovoljena jednadžba

$$\Delta F = -\frac{1}{\varepsilon} v \Rightarrow \Delta F_2 = -\frac{1}{\varepsilon} v_2 \tag{6a}$$

$$\Delta F_2 = -\frac{1}{\varepsilon} v_2 \tag{6b}$$

Konačno, kada se jednom odrede pomaci  $u$  i  $v$

$$u = \frac{dF}{dx} + \alpha \int v_1 dx \tag{7a}$$

$$v = \frac{dF}{dy} + \alpha \int v_2 dy \tag{7b}$$

gdje je

$$\alpha = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} - \text{konstanta izražena Laméovim parametrima}$$

definirana su također i normalna naprezanja  $N_1$  i  $N_2$  duž osi  $x$  i  $y$ , kao i posmično naprezanje  $T_3$  u ravnini  $x$ - $y$ :

$$N_1 = \lambda v + 2\mu \alpha v_1 + 2\mu \frac{d^2 F}{dx^2} \tag{8a}$$

$$N_2 = \lambda v + 2\mu \alpha v_2 + 2\mu \frac{d^2 F}{dy^2} \tag{8b}$$

$$T_3 = \mu \left[ 2 \frac{d^2 F}{dx dy} + \alpha \left( \frac{dv_1}{dy} dx + \alpha \int \frac{dv_2}{dx} dy \right) \right] \tag{8c}$$

Mathieuov postupak za osnovni slučaj (DEA) već je obrađen u radovima [3, 4, 5], pa je posebna pažnja usmjerena na drugi slučaj (DEB), koji je detaljno popraćen uz odgovarajuća objašnjenja i komentare.

## 2.2. Točna funkcija naprezanja u slučaju djelovanja promjenljivog tlačnog naprezanja (DEB)

Slučaj DEB pripada kategoriji opterećenja koje uzrokuje translaciju ploče kao krutog tijela.

**DEB** - rubni uvjeti:

$$N_1 = f(y), \quad x = \pm \frac{a}{2} \tag{9a}$$

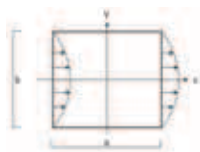
$$N_1 = -f(y), \quad x = -\frac{a}{2} \tag{9b}$$

$$N_2 = 0, \quad y = \pm \frac{b}{2} \tag{9b}$$

$$T_3 = 0, \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2} \tag{9c}$$

vanjsko opterećenje

$$f(y) = A_0 + \sum_n A_n \cos ny \tag{10}$$



### Uvođenje redova (izbor funkcija)

U ovom slučaju, s obzirom na opterećenje koje je neparno u odnosu na os  $x$  i parno u odnosu na os  $y$ , kubna dilatacija se usvaja kao kombinacija odgovarajućih funkcija:

$$v_1 = Dx + \sum_n B_n e(nx) \cos ny, \quad n = \frac{2q\pi}{b} \quad q = 1, 2, 3, \dots \tag{11a}$$

$$v_2 = \sum_m \beta_m E(my) \sin mx, \quad m = \frac{p\pi}{a} \quad p = 1, 3, 5, \dots \tag{11b}$$

Funkcije  $F_1$  i  $F_2$  su sada u obliku:

$$F_1 = -\frac{D}{6\varepsilon} x^3 - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_n \frac{1}{n} B_n x E(nx) \cos ny + \sum_n H_n e(nx) \cos ny \tag{12a}$$

$$F_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} \sum_m \frac{1}{m} \beta_m y E(my) \sin mx + \sum_m G_m E(my) \sin mx \tag{12b}$$

Radi jednostavnijeg ispisivanja veoma velikih izraza, uvedene su kratice  $E(\ ) = \cosh(\ )$ , odnosno  $e(\ ) = \sinh(\ )$ .

### Rubni uvjeti

Iz uvjeta da je  $T_3 = 0$  na rubu  $x = a/2$ , dobiva se grupa koeficijenata  $H_n$  u sljedećem obliku:

$$H_n = B_n \left[ -\frac{1}{2n^2} + \frac{a}{4n\varepsilon} \frac{e(\frac{1}{2}na)}{E(\frac{1}{2}na)} \right] \tag{13a}$$

Međutim, eliminiranje zbroja uz član  $\cos \frac{1}{2}ma$  ostvareno je adekvatnim odabirom vrijednosti parametra  $m = p\pi/a$ ,  $p = 1, 3, 5, \dots$  (11b).

Na isti način rubni uvjet  $T_3 = 0$  na rubu  $y = b/2$ , uz uvođenje poznatih vrijednosti parametara  $n = 2q\pi/b$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$  ( $\sin \frac{1}{2}nb = 0$ ) definira oblik grupe koeficijenata  $G_m$ :

$$G_m = \beta_m \left[ -\frac{1}{2m^2} + \frac{b}{4m\varepsilon} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right] \tag{13b}$$

Za ostale granične uvjete treba definirati sustav jednadžbi po nepoznatim koeficijentima  $B_n$  i  $\beta_m$ . Znači, uvodeći izraze (13), treći granični uvjet  $N_1 = f(y)$  na rubu  $x = a/2$  svodi se na:

$$\frac{(\lambda + 2\mu)Da - 2A_0}{2(\lambda + \mu)} + \sum_n \left[ B_n \left( e(\frac{1}{2}na) - \frac{na}{2} \frac{1}{E(\frac{1}{2}na)} \right) - \frac{A_n}{(\lambda + \mu)} \right] \cos ny + \sum_m \beta_m \left[ \left( 1 - \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) + mye(my) \right] \sin \frac{1}{2}ma = 0 \tag{14a}$$

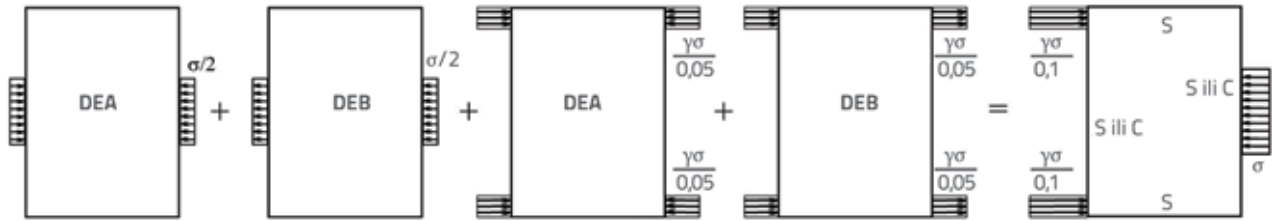
Na sličan način četvrti rubni uvjet  $N_2 = 0$  na rubu  $y = b/2$  određuje izraz oblika:

$$\frac{\lambda Dx}{(\lambda + \mu)} + \sum_n B_n \left[ \left( 1 - \frac{na}{2} \frac{e(\frac{1}{2}na)}{E(\frac{1}{2}na)} \right) e(nx) + nx E(nx) \right] \cos \frac{1}{2}nb + \sum_m \beta_m \left( E(\frac{1}{2}mb) + \frac{mb}{2} \frac{1}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) \sin mx = 0 \tag{14b}$$

Koeficijenti  $B_n$ ,  $\beta_m$  i  $B_0$ ,  $b_0$

Prva grupa koeficijenata dobiva se u eksplicitnom obliku množenjem jednadžbe (14a) sa  $dy$  i integriranjem u granicama  $\pm b/2$ :

$$D = \frac{2A_0}{(\lambda + 2\mu)a} \tag{15}$$



Slika 5. Superpozicija opterećenja DEA i DEB pri formiranju modela 1

Druga grupa koeficijenata dobiva se množenjem jednadžbe (14a) sa  $\cos ny$  i integriranjem u granicama  $\pm b/2$ , odnosno jednadžbe (14b) sa  $\sin mx$  i integriranjem u intervalu  $\pm a/2$ :

$$B_n = \frac{A_n}{(\lambda + \mu)\sigma(\frac{1}{2}na)} - \frac{8n^2 \cos \frac{1}{2}nb}{b\sigma(\frac{1}{2}na)} \sum_m \beta_m \frac{m e(\frac{1}{2}mb) \sin \frac{1}{2}ma}{(m^2 + n^2)^2} \quad (16a)$$

$$\beta_m = -\frac{4\lambda D \sin \frac{1}{2}ma}{(\lambda + \mu)am^2 \tau(\frac{1}{2}mb)} - \frac{8m^2 \sin \frac{1}{2}ma}{a\tau(\frac{1}{2}mb)} \sum_n \beta_n \frac{n E(\frac{1}{2}na) \cos \frac{1}{2}nb}{(m^2 + n^2)^2} \quad (16b)$$

Konačno, zamjenom koeficijenata  $\beta_m$  u izraz za  $B_n$  i obratno, a zatim i višestrukim uvođenjem odgovarajućih suma, njihovom kombinacijom položaja i svodenjem na bezdimenzijski oblik dobivaju se završni izrazi (17):

$$B_q = \frac{A_q}{(\lambda + \mu)\sigma(q\pi\phi)} + \frac{16\phi^4 q^2 (-1)^q}{(\lambda + \mu)\pi^2 \sigma(q\pi\phi)} \sum_q q' A_{q'} (-1)^{q'} \chi(q'\pi\phi) \times \{ \Lambda_1(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_3(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_5(q, q') + \dots \} + \frac{8\lambda\phi^3 q^2 (-1)^q A_0}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)\pi^3 \sigma(q\pi\phi)} \sum_p \frac{\Psi(p\pi / 2\phi)}{(p / 2)} \times \{ \Lambda_0(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_2(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_4(p, q) + \dots \} \quad (17a)$$

$$\beta_p = -\frac{2\lambda A_0 (-1)^{p-1/2}}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)(p / 2)^2 \pi^2 \tau(p\pi / 2\phi)} - \frac{32\lambda\phi^4 (p / 2)^2 A_0 (-1)^{p-1/2}}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)\pi^2 \tau(p\pi / 2\phi)} \times \sum_p \frac{\Psi(p\pi / 2\phi)}{(p / 2)} \{ Z_0(p, p') + (16\phi^4 / \pi^2) Z_2(p, p') + (16\phi^4 / \pi^2)^2 Z_4(p, p') + \dots \} - \frac{4\phi(p / 2)^2 (-1)^{p-1/2}}{(\lambda + \mu)\pi \tau(p\pi / 2\phi)} \sum_q q A_q (-1)^q \chi(q\pi\phi) \quad (17b)$$

Radi pojednostavljenja izraza, uvedene su kratice

$$\sigma(x) = e(x) - x / E(x), \quad \chi(x) = E(x) / \sigma(x) \quad (18)$$

dok su  $\Lambda$  i  $Z$  bezdimenzijske funkcije oblika:

$$\Lambda_0(p, q) = \frac{1}{((p / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \quad (19a)$$

$$\Lambda_1(q, q') = \sum_p \frac{(p / 2)^3 \Psi(p\pi / 2\phi)}{((p / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_0(p, q) \quad (19b)$$

$$\Lambda_2(p, q) = \sum_q \frac{q^3 \chi(q'\pi\phi)}{((p / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_1(q, q') \quad (19c)$$

$$\Lambda_3(q, q') = \sum_p \frac{(p / 2)^3 \Psi(p\pi / 2\phi)}{((p / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_2(p, q) \quad (19d)$$

$$\Lambda_4(p, q) = \sum_q \frac{q^3 \chi(q'\pi\phi)}{((p / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_3(q, q') \quad (19e)$$

$$Z_0(p, p') = \sum_q \frac{q^3 \chi(q\pi\phi)}{((p' / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_0(p, q) \quad (20a)$$

$$Z_2(p, p') = \sum_q \frac{q^3 \chi(q\pi\phi)}{((p' / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_2(p, q) \quad (20b)$$

$$Z_4(p, p') = \sum_q \frac{q^3 \chi(q\pi\phi)}{((p' / 2)^2 + \phi^2 q^2)^2} \Lambda_4(p, q) \quad (20c)$$

**Naprezanja**

Izrazi za točne funkcije naprezanja za razmatrani slučaj opterećenja (DEB) dobivaju se u obliku:

$$N_1 = \frac{2A_0}{a} x + (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[ \left( 1 + \frac{na}{2} \frac{e(\frac{1}{2}na)}{E(\frac{1}{2}na)} \right) e(nx) - nx E(nx) \right] \cos ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[ \left( 1 - \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) + my e(my) \right] \sin mx \quad (21a)$$

$$N_2 = \frac{2\lambda A_0}{a(\lambda + 2\mu)} x + (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[ \left( 1 - \frac{na}{2} \frac{e(\frac{1}{2}na)}{E(\frac{1}{2}na)} \right) e(nx) + nx E(nx) \right] \cos ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[ \left( 1 + \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) - my e(my) \right] \sin mx \quad (21b)$$

$$T_3 = (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left( -\frac{na}{2} \frac{e(\frac{1}{2}na)}{E(\frac{1}{2}na)} E(nx) + nxe(nx) \right) \sin ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left( \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} e(my) - my E(my) \right) \cos mx \quad (21c)$$

Da bi se predočilo rješenje za problem patch-loadinga u okviru tabličnog prikaza (tablica 1) za odabrani **model 1**, paralelno su prikazane i uspoređene raspodjele naprezanja dobivene analitičkim postupkom i primjenom programa ANSYS.

Za izabrani slučaj ( $\phi = 1$  i  $\gamma = 0,1$ ), radi dobivanja točne funkcije naprezanja, provedeno je superponiranje četiri karakteristična tipa opterećenja (slika 5.) i odgovarajući oblici obrađeni primjenom programa MATHEMATICA prikazani su u tablici 1. Radi precizne kontrole, odabrane izohipse analitičkog rješenja direktno su zadavane prilikom iscrtavanja dijagrama u programu ANSYS i u zadnjem stupcu prikazane tablice, provedeno je preklapanje odgovarajućih dijagrama s identičnim intenzitetima izohipsi kako bi se pokazalo izuzetno dobro podudaranje izvedenih rješenja.

**2.3. Formulacija problema stabilnosti**

Problem elastične stabilnosti pravokutnih ploča, različitih rubnih uvjeta i u ovom slučaju, razmatra se primjenom Ritzova energetskog postupka u okviru kojeg se energija deformacije savijene ploče definira na klasičan način, dok se pri određivanju rada vanjskih sila uvodi stvarna raspodjela naprezanja Mathieuove teorije elastičnosti. Primjenom točne raspodjele naprezanja za odabrani slučaj patch-loadinga, kao i dvostrukih Fourierovih redova s ciljem adekvatnog opisivanja odgovarajućih oblika izbočivanja, moguće je vrlo precizno odrediti vrijednosti koeficijenata elastičnog izvijanja. Analitički

Tablica 1. Prikaz raspodjele napreznja unutar ploče određenih analitičkim postupkom i primjenom programa na bazi konačnih elemenata

Ploča kombiniranih rubnih uvjeta odnosa dimenzija $\phi = a/b = 1.0$ i $\gamma = 0.1$			
	ANSYS (MKE)	Analitičko rješenje	Kontrola-preklop
$\sigma_x$			
	ANSYS (MKE)	Analitičko rješenje	Kontrola-preklop
$\sigma_y$			
	ANSYS (MKE)	Analitičko rješenje	Kontrola-preklop
$\tau_{xy}$			

postupak primijenjen je za dva granična slučaja ploča: slučaj nosača relativno laganih pojasnica koji se može tretirati kao ploča slobodno oslonjena duž sva četiri ruba (SSSS) i slučaj nosača krutih nožica gdje se, na mjestima njihove veze s rebrom, može uvesti efekt uklještenja (CSCS). Naravno da su radi verifikacije dobivenih koeficijenata izbočivanja korišteni odgovarajući programi na bazi konačnih elemenata (FINEL i ANSYS) jer u literaturi ne postoje usporedivi analitički rezultati.

### 2.3.1. Usvojene funkcije izbočivanja

Za odabrane primjere ploča i opterećenja usvojene su funkcije progiba u obliku dvostrukog Fourierovog reda (22-23) koji omogućuje da član po član zadovolji rubne uvjete i za koji je u prijašnjim analizama [4, 5] dokazano da vrlo dobro aproksimira deformiranu konfiguraciju u vrlo širokom opsegu odnosa dimenzija ploča.



**Slučaj 1**

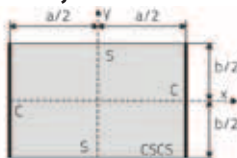


rub  $x = \pm a/2$  slobodno oslonjen (S)  
rub  $y = \pm b/2$  slobodno oslonjen (S)

Slika 6. Slobodno oslonjena ploča SSSS

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \quad (22)$$

**Slučaj 2**



rub  $x = \pm a/2$  upeti rub (C)  
rub  $y = \pm b/2$  slobodno oslonjen (S)

Slika 7. Ploča s kombiniranim rubnim uvjetima CSCS

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left( \cos \frac{(m-1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \quad (23)$$

**2.3.2. Energija deformacije pri savijanju ploče**

Pri određivanju ukupne potencijalne energije sustava u okviru Ritzova energetskog postupka, prvi član predstavlja energiju deformacije pri savijanju ploče, prikazanu na uobičajen, tradicionalan način:

$$U = \frac{1}{2} D \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (24)$$

gdje D označava krutost ploče na savijanje.

Dio potencijalne energije sustava, koji se odnosi na rad vanjskih sila predstavljen je izrazom (25), u okviru kojeg sada vrijede oznake točnih raspodjela naprezanja Mathieuove teorije elastičnosti  $N_1, N_2$  i  $T_3$  (21):

$$V = -\frac{t}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ N_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T_3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (25)$$

Dakle, uvođenjem točnih funkcija naprezanja, u čemu se i ogleda suštinska razlika u odnosu na sve prethodne analize problema stabilnosti ploča koje nisu isključivo slobodno oslonjene duž svih rubova, izraz za rad vanjskih sila se bitno usložnjava.

**2.3.3. Svođenje na problem svojstvenih vrijednosti**

Konačno, poslije definiranja energija deformacije savijanja ploče U i veličine koja odgovara radu vanjskih sila V, ukupna potencijalna energija sustava može se napisati kao:

$$\Pi = U + V \quad (26)$$

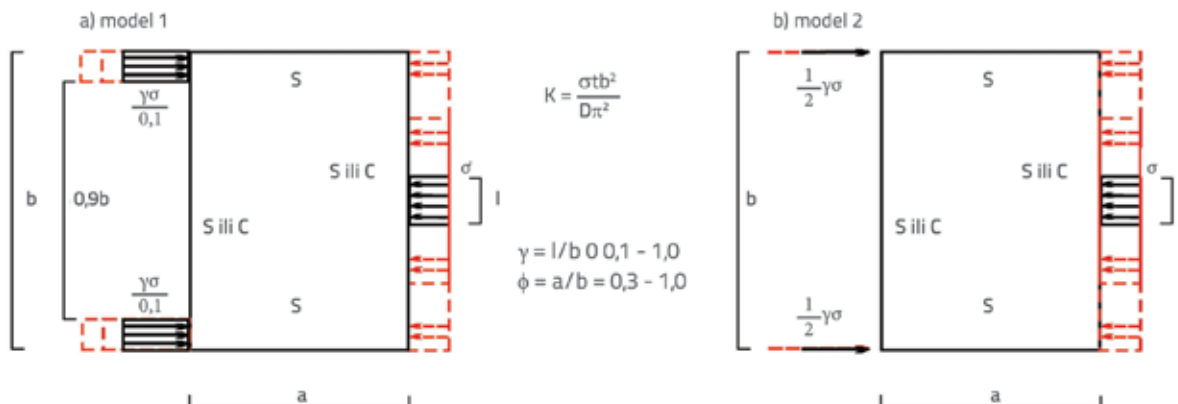
Iz principa o minimumu potencijalne energije dobiva se uvjet

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial U}{\partial W_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial W_{mn}} \quad (27)$$

koji se u biti svodi na sustav od  $m \cdot n$  homogenih linearnih jednačbi po nepoznatim koeficijentima  $W_{mn}$ . Postojanje neuobičajenog rješenja, odnosno uvjet da je determinanta sustava jednaka nuli, vodi prema rješavanju klasičnog problema svojstvenih vrijednosti, u okviru kojeg jedino praktično značenje za nas ima najniža svojstvena vrijednost, koja i predstavlja traženo kritično opterećenje. Zbog opsežnosti cjelokupnog postupka koji direktno zavisi od usvojenog broja članova, kako redova u okviru naponskih funkcija, tako i u okviru funkcija ugiba, u procesu rješavanja nužno je trebalo upotrijebiti odgovarajući računalni program (MATHEMATICA).

**3. Rezultati proračuna**

Za analizirani problem patch-loadinga, u slučaju *modela 1*, odabrano je detaljno, tablično prikazivanje vrijednosti kritičnog opterećenja u pogodnom obliku za dvije kategorije ploča različitih graničnih uvjeta (SSSS i CSCS), pri variranju odnosa dimenzija ploča  $\phi = 0.3 - 1$  i lokalnog tlačnog opterećenja  $\gamma = 0.1 - 1$ . U slučaju *modela 2*, dobiveni podaci prikazani su u



Oznake: K – koeficijenti izbočivanja; t – debljina rebra (ploče); D – krutost na savijanje ploče  $D = E t^3 / 12(1 - \nu^2)$

Slika 8. Analizirani primjeri

obliku dijagrama kako bi se izravno i jednostavnije usporedilo kritično opterećenje dvaju usvojenih modela (slika 8).

U okviru tablice za primjer **modela 1**, osim vrijednosti koeficijenta izbočivanja dobivenih izvedenim analitičkim postupkom, neku ulogu u smislu "eksperimentalnih" usporednih vrijednosti imaju i rezultati metode konačnih elemenata (ANSYS), kao i razlika izražena u postotku navedenih numeričkih podataka. oznake:

Kao što je poznato, kada su u pitanju analitička rješenja u obliku beskonačnih redova, provjera konvergencije je nužna. S obzirom na to da smo, iz posve praktičnih razloga, prinuđeni uvesti ograničen broj članova reda, kako funkcija progiba tako i funkcija naprezanja, čitavom ovom postupku određivanja kritičnog opterećenja morala je prethoditi detaljna analiza

konvergencije rješenja u zavisnosti od vrste i broja odabranih članova reda. Analiza je pokazala da za kategorije opterećenja koje su ovdje razmatrane (DEA i DEB) sa stajališta funkcija naprezanja, apsolutna stabilnost rješenja postiže se sa 40 i više članova. Kada je u pitanju funkcija progiba, budući da se analiziraju ploče različitih rubnih uvjeta (SSSS i CSCS), uočeno je da sa po 20 članova reda, funkcije prikazane izrazima (22-23), veoma dobro opisuju sve oblike izbočivanja za cjelokupan analizirani opseg dimenzija ploča  $\phi$  i opterećenja  $\gamma$ . Naravno, limitiranjem broja članova dobiva se približno točno rješenje, ali u ovom konkretnom slučaju, prema podacima prikazanim u tablicama 2 i 3, povećanje broja članova ne bi značajno utjecalo na točnost, a u velikoj bi mjeri usporilo postupak dobivanja rješenja.

Tablica 2. Vrijednosti koeficijenta izbočivanja za model 1 u slučaju ploče SSSS ( $\phi = 0.3 - 1, \gamma = 0.1 - 1$ )

Ploča SSSS – patch loading						Model 1	Primjer $\phi = 0.5$ i $\gamma = 0.3$
$K_z = K\phi^2\gamma$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	Rezultati	
$\gamma = 0.1$	0.6898	1.2149	1.7619	2.4898	2.9630	analit. rješenje	
	0.6885	1.2131	1.7591	2.4855	2.9577	MKE (Ansys)	
	(-0.188)	(-0.148)	(-0.159)	(-0.173)	(-0.179)	Raz (%)	
$\gamma = 0.3$	0.8809	1.3555	1.8898	2.6339	3.1226	analit. rješenje	
	0.8796	1.3536	1.8867	2.6293	3.1169	MKE (Ansys)	
	(-0.148)	(-0.140)	(-0.164)	(-0.175)	(-0.183)	Raz (%)	
$\gamma = 0.4$	1.0127	1.4589	1.9928	2.7526	3.2539	analit. rješenje	
	1.0114	1.4569	1.9896	2.7478	3.2480	MKE (Ansys)	
	(-0.128)	(-0.137)	(-0.161)	(-0.174)	(-0.181)	Raz (%)	
$\gamma = 0.5$	1.1588	1.5793	2.1201	2.9000	3.4159	analit. rješenje	
	1.1575	1.5770	2.1165	2.8949	3.4096	MKE (Ansys)	
	(-0.112)	(-0.146)	(-0.170)	(-0.176)	(-0.184)	Raz (%)	
$\gamma = 0.7$	1.4679	1.8706	2.4486	3.2720	3.8155	analit. rješenje	
	1.4666	1.8676	2.4443	3.2661	3.8083	MKE (Ansys)	
	(-0.089)	(-0.160)	(-0.176)	(-0.180)	(-0.189)	Raz (%)	
$\gamma = 0.9$	1.7798	2.2447	2.8686	3.7078	4.2574	analit. rješenje	
	1.7776	2.2409	2.8634	3.7010	4.2493	MKE (Ansys)	
	(-0.124)	(-0.169)	(-0.181)	(-0.183)	(-0.190)	Raz (%)	
$\gamma = 1.0$	1.9557	2.4614	3.0993	3.9238	4.4621	analit. rješenje	
	1.9530	2.4571	3.0938	3.9166	4.4536	MKE (Ansys)	
	(-0.128)	(-0.175)	(-0.177)	(-0.183)	(-0.190)	Raz (%)	



Tablica 3. Vrijednosti koeficijenta izbočivanja za model 1 u slučaju ploče CSCS ( $\phi = 0.3 - 1, \gamma = 0.1 - 1$ )

Ploča CSCS – patch loading						Model 1	Primjer $\phi = 0.5$ i $\gamma = 0.3$	
$K_2 = K\phi^2g$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	Rezultati		
$\gamma = 0.1$	1.7748	3.2502	4.3354	5.2013	5.7410	analit. rješenje		
	1.7732	3.2485	4.3336	5.1979	5.7464	MKE (Ansys)		
	(-0.090)	(-0.052)	(-0.042)	(-0.065)	(-0.080)	Raz (%)		
$\gamma = 0.3$	2.4361	3.7632	4.6484	5.4524	5.9765	analit. rješenje		
	2.4341	3.7623	4.6473	5.4498	5.9726	MKE (Ansys)		
	(-0.082)	(-0.024)	(-0.024)	(-0.048)	(-0.065)	Raz (%)		
$\gamma = 0.4$	2.8113	4.1350	4.8817	5.6488	6.1599	analit. rješenje		
	2.8077	4.1343	4.8806	5.6460	6.1562	MKE (Ansys)		
	(-0.128)	(-0.017)	(-0.023)	(-0.050)	(-0.060)	Raz (%)		
$\gamma = 0.5$	3.0464	4.5390	5.1598	5.8878	6.3802	analit. rješenje		
	3.0421	4.5384	5.1585	5.8851	6.3764	MKE (Ansys)		
	(-0.141)	(-0.013)	(-0.025)	(-0.046)	(-0.060)	Raz (%)		
$\gamma = 0.7$	3.5057	5.2106	5.8434	6.4732	6.8996	analit. rješenje		
	3.4997	5.2075	5.8413	6.4700	6.8955	MKE (Ansys)		
	(-0.171)	(-0.059)	(-0.036)	(-0.049)	(-0.062)	Raz (%)		
$\gamma = 0.9$	3.7704	5.7234	6.6654	7.1349	7.4435	analit. rješenje		
	3.7623	5.7164	6.6622	7.1313	7.4389	MKE (Ansys)		
	(-0.215)	(-0.122)	(-0.048)	(-0.050)	(-0.062)	Raz (%)		
$\gamma = 1.0$	3.9003	5.9571	7.0924	7.4649	7.6968	analit. rješenje		
	3.8909	5.9483	7.0883	7.4612	7.6920	MKE (Ansys)		
	(-0.241)	(-0.148)	(-0.058)	(-0.050)	(-0.062)	Raz (%)		

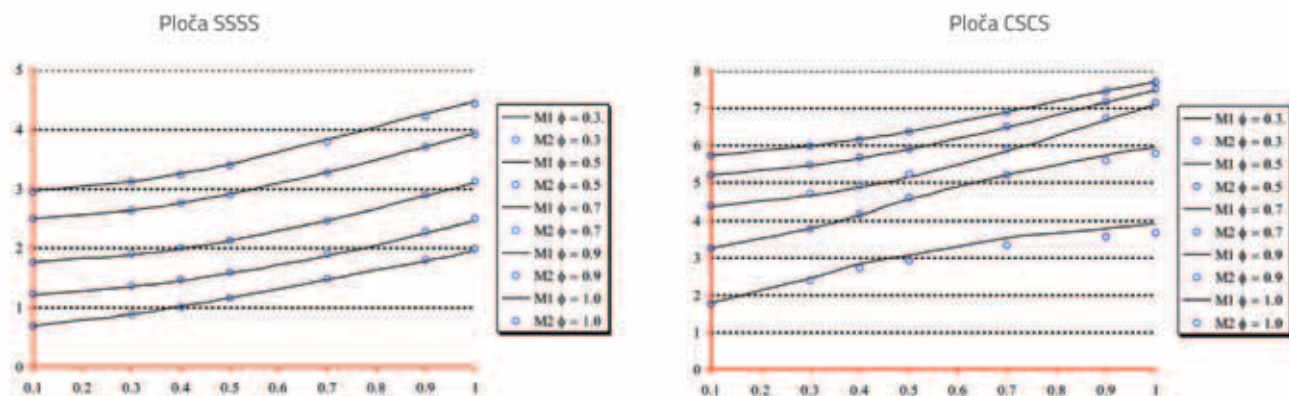
#### 4. Analiza rezultata proračuna

Detaljnijom analizom prikazanih rezultata *modela 1* (tablice 2 i 3) uočljivo je izuzetno dobro ponašanje analitičkog rješenja za oba tipa graničnih uvjeta u cjelokupnom razmatranom opsegu dimenzija ploča ( $\phi = 0,3 - 1$ ) i opterećenja ( $\gamma = 0,1 - 1$ ). Vrijednosti koeficijenta izbočivanja u slučaju patch-loadinga opisanog *modelom 1* za dva odabrana tipa ploča (SSSS, CSCS) upućuju na odstupanje u odnosu na vrijednosti ostvarene primjenom metode konačnih elemenata za najviše 0,25 % (ploča: CSCS,  $\phi = 0,3$  i  $\gamma = 1$ ).

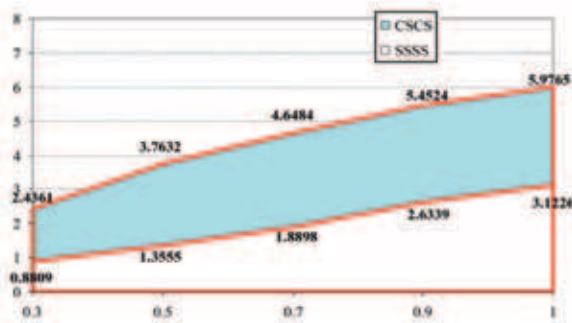
Bez obzira na problem stabilnosti kao posljedice ograničenog broja članova odabranih interpolacijskih funkcija, rješenja metode konačnih elemenata približno su točna. Ovako mala razlika ostvarenih vrijednosti upućuje na izuzetnu preciznost analitičkog postupka.

Rezultati ostvareni primjenom *modela 2* prošli su identični oblik kontrole, usporedbom s kritičnim vrijednostima dobivenim za ekvivalentne tipove opterećenja primjenom programa ANSYS i pokazali su isti, visok stupanj podudarnosti (maksimalna razlika u slučaju slobodno oslonjene ploče je 0,3 % za  $\phi = 0,1$  i  $\gamma = 1$ , odnosno za ploču CSCS 0,95 % za  $\phi = 0,3$  i  $\gamma = 1$ ). Budući da je analiza rezultata ostvarenih primjenom *modela 2* upozorila na neznatna odstupanja u odnosu na osnovni *model 1*, odlučeno je da se vrijednosti kritičnog opterećenja za *model 2* ne prikazuju tablično, nego grafički kako bi se učinkovitije usporedilo ponašanje dvaju analiziranih modela (slika 9.).

Usporedbom analiziranih modela uočava se da je u slučaju slobodno oslonjene ploče (slika 9.a) razlika rješenja najizraženija za  $\phi = 0,3$ , i to u rasponu od -0,9 % ( $\gamma = 0,1$ ) do 1,5 % ( $\gamma = 1$ ). U ostalim slučajevima ploče SSSS kritične vrijednosti opterećenja za dva analizirana modela su unutar jedan posto.

Slika 9. Usporedba rezultata analiziranih modela: *model 1* (M1) i *model 2* (M2)

U slučaju ploče s parom upetih rubova CSCS očekivalo se izvjesno razmimoilaženje rezultata, posebno za kategoriju uskih ploča ( $\phi = 0,3$  i  $\phi = 0,5$ ). Na slici 9.b uočava se da **model 2** daje nešto niže vrijednosti kritičnog opterećenja (i do 6% za  $\phi = 0,3$  i  $\gamma = 1$ ) u odnosu na **model 1**. Kako se odnos dimenzija ploče približava jedinici, razlike se smanjuju i za primjer kvadratne ploče te u čitavom opsegu opterećenja ne prelaze 0,1%. Analizom podataka može se zaključiti da se dva navedena modela veoma slično ponašaju za odabrani tip opterećenja (patch-loading).

Slika 10. Kritično opterećenje ploča SSSS i CSCS dobiveno primjenom *model 1*

Budući da je u okviru ovog rada analizirano ponašanje ploča različitih rubnih uvjeta, smatralo se zanimljivim prikazati i rezervu nosivosti čeličnog rebra pri djelovanju patch-loadinga (**model 1**), kad je riječ o dva rubna uvjeta oslanjanja, SSSS i CSCS. Na odabranom primjeru opterećenja  $\gamma = 0,3$  (slika 10.) prirast vrijednosti koeficijenta izvijanja, posebno za kategoriju uskih ploča, iznosi i do 2,8 puta (za  $\phi = 0,3$  ploča SSSS ima  $K_2 = 0,8809$  dok ploča CSCS  $K_2 = 2,4361$ ). Ako se uzme u obzir i preostali opseg opterećenja, uvećanje nosivosti je od 1,7 do 2,7 puta.

## 5. Zaključak

Provedena detaljna analiza pokazuje da se definirana (točna) funkcija naprezanja i odabrana funkcija progiba izuzetno dobro ponašaju u uvjetima osnovnih odabranih modela koji su primijenjeni u ovom radu za opis slučaja patch-loadinga. Na taj način je stvorena realna osnova za nadogradnju ovih modela uključivanjem posmičnih naprezanja duž kraćeg ruba ploče (na mjestima vertikalnih ukrućenja iznad oslonaca) i uvođenjem utjecaja posmika na kontaktu nožice i rebra, što do sada u istraživanjima nije analitički razmatrano.

## LITERATURA

- [1] Mathieu, E.: *Theorie de l'elasticite des corps solides, Seconde partie*. GauthierVillars, Paris.1890.
- [2] Baker, G., Pavlović, M.N. & Tahan, N.: An exact solution to the two-dimensional elasticity problem with rectangular boundaries under arbitrary edge forces, *Phil. Trans. R. Soc. London*, A 393, pp. 307-336, 1993.
- [3] Liu, Y. G.: Buckling of Plates under Non-Uniform Stresses, with Particular Emphasis on Shear, *Ph. D Thesis, Imperial College, London*, 2006.
- [4] Mijušković, O.: Analiza stabilnosti pravougaonih ploča korištenjem tačne funkcije napona, *Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd* 2008.
- [5] Mijušković, O., Ćorić, B.: Analytical ProcEDURE for Determining Critical Load of Plates with Variable Boundary Conditions, original scientific paper, *Građevinar, Journal of the Croatian Association of Civil Engineers*, Vol. 64 (3), pp. 185-194, Zagreb, 2012.
- [6] Liu, Y.G., Pavlović, M.N.: Elastic Stability of Flat Rectangular Plates under Patch Compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 (8), pp. 970-982, 2007.
- [7] Liu, Y.G., Pavlović, M.N.: A Generalized Analytical Approach to the Buckling of Simply-supported Rectangular Plates under Arbitrary Loads, *Engineering Structures*, 30 (5), pp. 1346-1359, 2008.