

Primljen / Received: 23.12.2011.
 Ispravljen / Corrected: 3.4.2012.
 Prihvaćen / Accepted: 10.4.2012.
 Dostupno online / Available online: 25.4.2012.

Analitički postupak određivanja kritičnog opterećenja ploča različitih rubnih uvjeta

Autori:



Doc.dr.sc. **Olga Mijušković**, dipl.ing.građ.
 Sveučilište Crne Gore
 Građevinski fakultet u Podgorici
olja64@yahoo.com



Prof.dr.sc. **Branislav Ćorić**, dipl.ing.građ.
 Sveučilište u Beogradu
 Građevinski fakultet
bcoric@grf.bg.ac.rs

Izvorni znanstveni rad

Olga Mijušković, Branislav Ćorić

Analitički postupak određivanja kritičnog opterećenja ploča različitih rubnih uvjeta

U radu je predstavljen analitički postupak za određivanje kritičnog opterećenja pravokutnih ploča različitih rubnih uvjeta pod djelovanjem proizvoljnog vanjskog opterećenja. Postupak određivanja kritičnog opterećenja temeljen je na Ritz-ovoj energijskoj metodi. S obzirom na složenost matematičkog modela, analiziran je slučaj lokalno raspodijeljenog tlačnog naprezanja. Na primjerima ploča različitih rubnih uvjeta, dokazana je primjenljivost i visoka točnost prikazane metode usporedbom koeficijenata izbočenja s rezultatima proračuna.

Ključne riječi:

elastična stabilnost ploča, točna funkcija naprezanja, mješoviti rubni uvjeti, lokalno opterećenje

Original scientific paper

Olga Mijušković, Branislav Ćorić

Analytical procedure for determining critical load of plates with variable boundary conditions

An analytical procedure for determining critical load, exerted on rectangular plates subjected to arbitrary external load under variable boundary conditions, is presented in the paper. The procedure used in critical load determination is based on the Ritz energy method. Because of complexity of mathematical model used, the case of locally distributed compressive stress is analyzed. The applicability and high level of accuracy of the method presented in the paper is proven through comparison of buckling coefficients and analysis results. This comparison is made using examples of plates with variable boundary conditions.

Key words:

elastic stability of plates, accurate stress function, combined boundary conditions, local load

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Olga Mijušković, Branislav Ćorić

Analytisches Verfahren zur Feststellung der kritischen Belastung von Blechen mit verschiedenen Randbedingungen

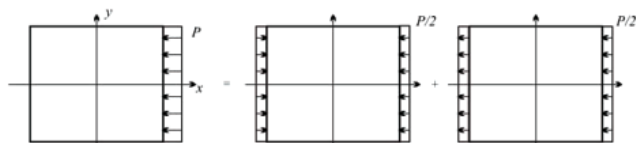
In der Arbeit ist das analytische Verfahren zur Feststellung der kritischen Belastung von rechteckigen Blechen mit verschiedenen Randbedingungen unter der Wirkung von willkürlichen Außenbelastungen dargestellt. Das Verfahren zur Feststellung der kritischen Belastung basiert auf der Ritzschen Energiemethode. Hinsichtlich der Komplexität des mathematischen Modells wurde der Fall der lokal verteilten Druckbeanspruchung analysiert. Anhand von Beispielen von Blechen mit verschiedenen Randbedingungen, wurde die Anwendbarkeit und hohe Präzision der dargestellten Methode durch Vergleich der Knickkoeffizienten mit den Berechnungsergebnissen aufgezeigt.

Schlüsselwörter:

Elastische Stabilität von Blechen, exakte Funktionsbeanspruchung, kombinierte Randbedingungen, Lokalbelastung

1. Uvod

Analitički postupak određivanja točne raspodjele naprezanja unutar pravokutne ploče opterećene u svojoj ravnini, koji je temelj ovoga rada, zasnovan je na rješenju koje datira iz XIX. stoljeća. Naime, Mathieu [1] je još 1890. godine prvi odredio funkciju naprezanja za konkretan slučaj pravokutne ploče opterećene po konturi proizvoljnim tlačnim naprezanjem primjenom superpozicije dvaju, kako se to uobičajeno kaže, bazičnih ili osnovnih tipova opterećenja (DEA i DEB), slika 1.



Slika 1. Rastavljanje opterećenja na slučajeve DEA i DEB

Jedan je od ovih slučajeva (DEA) primijenjen pri analizi stabilnosti slobodno oslonjenih ploča pod djelovanjem lokalno raspoređenog tlačnog naprezanja, u seriji radova Bakera i Pavlovića [2–5]. Međutim, tek nekoliko godina kasnije [6], više od jednog stoljeća nakon originalnog rada Mathieua, isti su se autori vratili osnovnom problemu u namjeri da osiguraju rješenje točne raspodjele naprezanja za opći slučaj pravokutne ploče pod djelovanjem proizvoljnog vanjskog opterećenja. Suština je u činjenici da se bilo koje opterećenje (normalno i/ili posmično) koje djeluje na konturi ploče može opisati odabranim funkcijama (parnim i/ili neparnim u odnosu na koordinatne osi), tako da se ukupno rješenje dobiva odgovarajućom kombinacijom osam osnovnih slučajeva (slika 2.).

U okviru ovog rada, radi detaljnoga opisa predloženoga analitičkog postupka, zadržat ćemo se na prvom, osnovnom slučaju opterećenja (DEA) pri analizi ponašanja ploča različitih rubnih uvjeta. Naime, do sada u literaturi, u radovima Pavlovića i Liua [7], obrađeni su primjeri isključivo slobodno oslonjenih

ploča različitih omjera dimenzija s funkcijama progiba, u obliku dvostrukih sinusnih trigonometrijskih redova koje su pokazale visoku prilagodljivost realnom obliku izbočenja.

Međutim, za ploče drugačijih rubnih uvjeta do sada nisu provedene slične analize. S obzirom da se u realnim čeličnim konstrukcijama pojavljuju veoma složeni tipovi vanjskog opterećenja, uz uključivanje točnih raspodjela naprezanja, iznimno je važno i provjeriti da li predložene funkcije dobro opisuju različite oblike izbočenja pri djelovanju svakog od navedenih osnovnih tipova opterećenja. Na taj se način, pri opisu složenih vanjskih utjecaja, primjenom superpozicije dvaju ili više osnovnih tipova opterećenja, može osigurati visoka točnost ostvarenih rezultata.

2. Teorijska osnova problema

Prije rješavanja odabranog slučaja opterećenja (DEA), nužan je pregled osnovnih Mathieuovih izraza temeljenih na jednadžbama teorije elastičnosti u ravnini jer se njegova analiza i oznake djelomično razlikuju od danas uvriježenih pristupa. U svome radu Mathieu je poznate jednadžbe ravnoteže, bez djelovanja volumenskih sila, izrazio preko pomaka u obliku:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \Delta u = -\frac{1}{\epsilon} \frac{dv}{dx} \quad (1a)$$

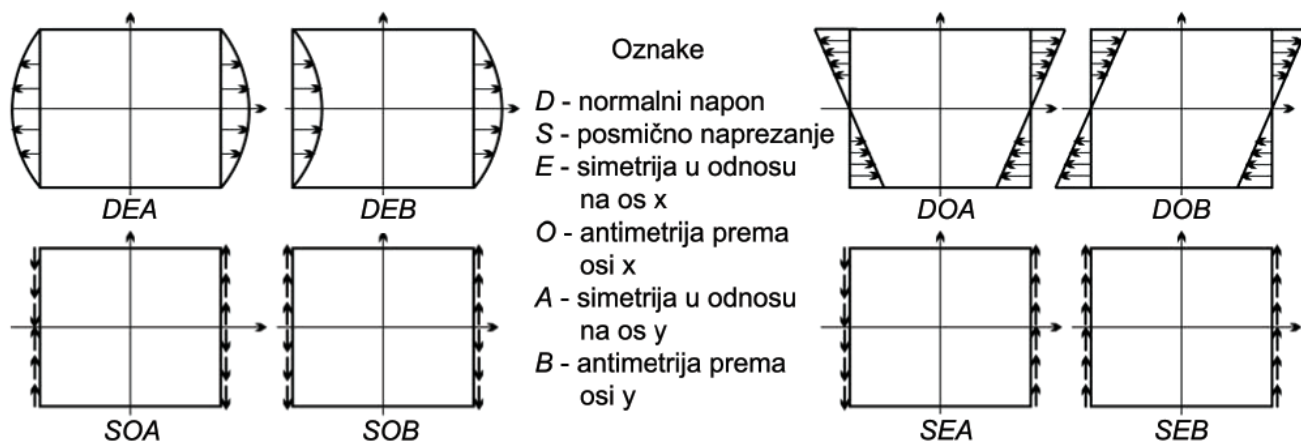
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \text{Mathieu} \Rightarrow \Delta v = -\frac{1}{\epsilon} \frac{dv}{dy} \quad (1b)$$

gdje su:

Δ - Laplaceov operator

u, v - pomaci u smjeru x i y

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \text{volumenska dilatacija (promjena volumena)} \quad (2)$$



Slika 2. Osam osnovnih tipova opterećenja

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{- konstanta definirana Laméovim koeficijentima.} \quad (3)$$

Relativno jednostavnim matematičkim operacijama jednačbe iz sustava (1) mogu se napisati u obliku:

$$\Delta v = 0 \quad (4)$$

Mathieuov pristup rješavanju problema ravninske teorije elastičnosti počinje pažljivim izborom funkcija za veličinu v (4) u obliku dvaju Fourierovih redova s nepoznatim koeficijentima kojima treba opisati simetriju i antisimetriju raspodjele naprezanja u odnosu na osi x i y respektivno.

$$v = v_1 + v_2 \quad (5)$$

Sljedeći je korak uvođenje funkcije $F(F_1+F_2)$ iz uvjeta da mora biti zadovoljena jednačba:

$$\Delta F = -\frac{1}{\varepsilon} v \quad \Rightarrow \quad \Delta F_1 = -\frac{1}{\varepsilon} v_1 \quad (6a)$$

$$\Delta F_2 = -\frac{1}{\varepsilon} v_2 \quad (6b)$$

Konačno, kada se jednom odrede pomaci u i v ,

$$u = \frac{dF}{dx} + \alpha \int v_1 dx \quad (7a)$$

$$v = \frac{dF}{dy} + \alpha \int v_2 dy \quad (7b)$$

gdje je:

$$\alpha = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \quad \text{- konstanta izražena Laméovim parametrima}$$

definirani su, također, i normalna naprezanja N_1 i N_2 duž osi x i y i posmično naprezanje T_3 u ravnini $x - y$.

$$N_1 = \lambda v + 2\mu \alpha v_1 + 2\mu \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (8a)$$

$$N_2 = \lambda v + 2\mu \alpha v_2 + 2\mu \frac{d^2 F}{dy^2} \quad (8b)$$

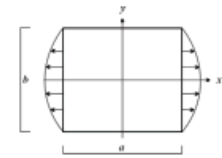
$$T_3 = \mu \left[2 \frac{d^2 F}{dx dy} + \alpha \int \frac{dv_1}{dy} dx + \alpha \int \frac{dv_2}{dx} dy \right] \quad (8c)$$

Najbolji i najjednostavniji način način prikladnoga objašnjenja Mathieuovog postupka jest detaljno razmatranje jednoga osnovnog tipa opterećenja (DEA).

3. Točna funkcija naprezanja u slučaju djelovanja promjenjivoga tlačnog naprezanja (DEA)

Proračun počinje uvođenjem izraza za vanjsko opterećenje u obliku Fourierovog reda

$$f(y) = A_0 + \sum_n A_n \cos ny$$



S obzirom da slučaj DEA karakterizira simetrija u odnosu na obje osi. Također i izbor funkcija za komponente v_1 i v_2 uvjetovan je postojanjem dvostruke simetrije.

$$v_1 = B_0 + \sum_n B_n \cosh(nx) \cos ny \quad n = \frac{2q\pi}{b} \quad q = 1,2,3, \dots \quad (9a)$$

$$v_2 = \beta_0 + \sum_m \beta_m \cosh(my) \cos mx \quad m = \frac{2p\pi}{a} \quad p = 1,2,3, \dots \quad (9b)$$

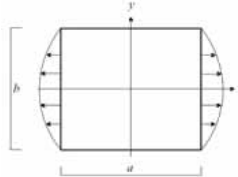
Na isti način na koji je dilatacija prikazana superpozicijom dviju funkcija i veličina F je rastavljena na komponente F_1 i F_2 koje su rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (6).

$$F_1 = -\frac{1}{2\varepsilon} B_0 x^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_n \frac{1}{n} B_n x e(nx) \cos ny + \sum_n H_n E(nx) \cos ny \quad (10a)$$

$$F_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} \beta_0 y^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_m \frac{1}{m} \beta_m y e(my) \cos mx + \sum_m G_m E(my) \cos mx \quad (10b)$$

Radi kraćeg zapisa vrlo složenih izraza, uvedene su skraćenice (primjerice $E(\bullet) = \cosh(\bullet)$, odnosno $e(\bullet) = \sinh(\bullet)$) čije će značenje biti objašnjeno tijekom izvoda.

Konačno, uvrštavanjem funkcija F_1 i F_2 u izraze za naprezanja (8), rješenje problema svedeno je na određivanje četiriju nepoznatih grupa koeficijenata B_n, β_m, H_n i G_m iz raspoloživih rubnih uvjeta. U principu, za slučaj pravokutne ploče postoji osam uvjeta (po dva na svakoj konturi), ali se oni, zbog svojstava uvedenih funkcija dilatacija svode na nužna četiri. U primjeru DEA to su:



DEA Rubni uvjeti:

$$N_1 = f(y), \quad x = \pm \frac{a}{2} \quad (11a)$$

$$N_2 = 0, \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (11b)$$

$$T_3 = 0, \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (11c)$$

Dakle, postupak rješavanja nastavlja se izborom dvaju rubnih uvjeta kojima definiramo izravnu ovisnost između odgovarajućih grupa nepoznatih koeficijenata, dok preostala

dva svode problem na beskonačan sustav linearnih jednadžbi koje sadrže parametre vanjskog opterećenja.

Primjenjujući izvorni Mathieuov postupak pri rješavanju ovog problema, uvjeti da su vrijednosti posmičnih naprežanja na konturi jednaki nuli (11c) omogućavaju definiranje grupe koeficijenata H_n i G_m .

$$H_n = B_n \left[-\frac{1}{2n^2} + \frac{a}{4n\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right] \tag{12a}$$

$$G_m = \beta_m \left[-\frac{1}{2m^2} + \frac{b}{4m\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right] \tag{12b}$$

Druga grupa graničnih uvjeta koja se odnosi na raspored normalnih napona vodi definiranju sustava jednadžbi prema nepoznatim koeficijentima B_n i β_m koji jednoznačno određuju komponente pomaka i promjenu naprežanja unutar ploče za analizirani slučaj opterećenja.

$$B_n = \frac{A_n}{(\lambda + \mu)\tau(\frac{1}{2}na)} - \frac{8n^2 \cos \frac{1}{2}nb}{b\tau(\frac{1}{2}na)} \sum_m \beta_m \frac{m e(\frac{1}{2}mb) \cos \frac{1}{2}ma}{(m^2 + n^2)^2} \tag{13a}$$

$$\beta_m = -\frac{8m^2 \cos \frac{1}{2}ma}{a\tau(\frac{1}{2}mb)} \sum_n B_n \frac{n e(\frac{1}{2}na) \cos \frac{1}{2}nb}{(m^2 + n^2)^2} \tag{13b}$$

U prikazanim je izrazima definirana ovisnost veličina B_n i β_m te parametara vanjskog opterećenja. Konačno, zamjenom koeficijenata β_m u izraz za B_n i obratno, a zatim i višestrukim uvođenjem odgovarajućih suma, njihovom kombinacijom položaja i svođenjem na bezdimenzionalni oblik, dobiven je beskonačni sustav jednadžbi (14). Dakako, u praktičnim smo primjerima prinuđeni uvesti konačan broj članova reda čiji je optimalni broj, sa stajališta konvergencije i točnosti, potrebno veoma pažljivo definirati.

$$B_q = \frac{A_q}{(\lambda + \mu)\tau(q\pi\phi)} + \frac{16\phi^4 q^2 (-1)^q}{(\lambda + \mu)\pi^2 \tau(q\pi\phi)} \sum_q' A_q (-1)^q \Psi(q'\pi\phi) \times \{ \Lambda_1(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_3(q, q') + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_5(q, q') + \dots \} \tag{14a}$$

$$\beta_p = -\frac{4\phi p^2 (-1)^p}{(\lambda + \mu)\pi \tau(p\pi / \phi)} \sum_q A_q (-1)^q \Psi(q\pi\phi) \times \{ \Lambda_0(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2) \Lambda_2(p, q) + (16\phi^4 / \pi^2)^2 \Lambda_4(p, q) + \dots \} \tag{14b}$$

Radi pojednostavljenja izraza uvedene su skraćenice,

$$\tau(x) = E(x) + x / e(x) \quad i \quad \Psi(x) = e(x) / \tau(x) \tag{15}$$

dok su Λ bezdimenzionalne funkcije oblika:

$$\Lambda_0(p, q) = \frac{1}{(p^2 + \phi^2 q^2)^2} \tag{16a}$$

$$\Lambda_1(q, q') = \sum_p \frac{p^3 \Psi(p\pi / \phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_0(p, q) \tag{16b}$$

$$\Lambda_2(p, q) = \sum_q' \frac{q'^3 \Psi(q'\pi\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_1(q, q') \tag{16c}$$

$$\Lambda_3(q, q') = \sum_p \frac{p^3 \Psi(p\pi / \phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_2(p, q) \tag{16d}$$

$$\Lambda_4(p, q) = \sum_q' \frac{q'^3 \Psi(q'\pi\phi)}{(p^2 + \phi^2 q'^2)^2} \Lambda_3(q, q') \tag{16e}$$

Izrazi za pomake, dakako samo kao funkcije koordinata x i y, dobivaju se iz izraza (7) u obliku:

$$u = B_0 x + \sum_n B_n \left[\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{a}{4\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) e(nx) - \frac{x E(nx)}{2\epsilon} \right] \cos ny + \sum_m \beta_m \left[\left(\frac{1}{2m} - \frac{b}{4\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) + \frac{y e(my)}{2\epsilon} \right] \sin mx \tag{17a}$$

$$v = \beta_0 y + \sum_n B_n \left[\left(\frac{1}{2n} - \frac{a}{4\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) E(nx) + \frac{x e(nx)}{2\epsilon} \right] \sin ny + \sum_m \beta_m \left[\left(\frac{\alpha}{2m} + \frac{b}{4\epsilon} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) e(my) - \frac{y E(my)}{2\epsilon} \right] \cos mx \tag{17b}$$

U skladu s jednadžbama (8) dobivaju se izrazi za točne funkcije naprežanja za razmatrani slučaj opterećenja (DEA).

$$N_1 = A_0 + (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[\left(1 + \frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) E(nx) - nxe(nx) \right] \cos ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[\left(1 - \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) + my e(my) \right] \cos mx \tag{18a}$$

$$N_2 = (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left[\left(1 - \frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} \right) E(nx) + nxe(nx) \right] \cos ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left[\left(1 + \frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} \right) E(my) - my e(my) \right] \cos mx \tag{18b}$$

$$T_3 = (\lambda + \mu) \sum_n B_n \left(-\frac{na}{2} \frac{E(\frac{1}{2}na)}{e(\frac{1}{2}na)} e(nx) + nx E(nx) \right) \sin ny + (\lambda + \mu) \sum_m \beta_m \left(-\frac{mb}{2} \frac{E(\frac{1}{2}mb)}{e(\frac{1}{2}mb)} e(my) + my E(my) \right) \sin mx \tag{18c}$$

Naposljetku radi prezentacije rješenja u okviru tablica (tablica 1.) usporedno su prikazane raspodjele naprežanja dobivene analitičkim postupkom i primjenom programa FINEL i ANSYS, koji se, naravno, zasnivaju na metodi konačnih elemenata.

Iz prikazanih je dijagrama očito da se raspodjela naprežanja na mjestima djelovanja opterećenja teško može smatrati jednolikom što je bila najčešća pretpostavka, a ujedno i najveća greška u dosadašnjim analizama sličnih problema prije uvođenja točnih rješenja.

4. Formulacija problema stabilnosti

Problem elastične stabilnosti pravokutnih ploča, različitih rubnih uvjeta, razmatra se primjenom Ritzova energetskog postupka

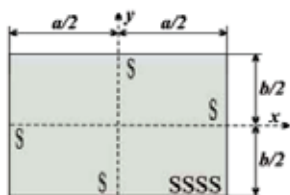
Tablica 1. Prikaz raspodjele naprezanja unutar ploče određenih analitičkim postupkom i proračunom

Ploča kombiniranih rubnih uvjeta odnosa dimenzija $\phi = a/b = 1,0$			
	Proračun (Finel)	Analičko rješenje	Kontrola-preklop
σ_x			
σ_y			
τ_{xy}			

u okviru kojeg se energija deformacije savijene ploče definira na tradicionalan način, dok se pri određivanju rada vanjskih sila uvodi stvarna raspodjela naprezanja Mathieuove teorije elastičnosti. Primjenom točne raspodjele naprezanja za bilo koje proizvoljno vanjsko opterećenje, kao i dvostrukih Fourierovih redova radi prikladnog opisa odgovarajućih oblika izbočenja, moguće je vrlo točno odrediti vrijednosti koeficijenta elastičnog izvijanja. Analitički je postupak prikazan na primjerima četiriju različitih tipova ploča mješovitih rubnih uvjeta (SSSS, SCSC, CSCS i CCCC) pri djelovanju promjenljivoga tlačnog naprezanja (DEA). Naravno, radi provjere dobivenih koeficijenta izbočenja primijenjeni su odgovarajući programi temeljeni na metodi konačnih elemenata (FINEL i ANSYS), budući da u literaturi nema sličnih analitičkih rješenja.

4.1. Usvojene funkcije izbočenja

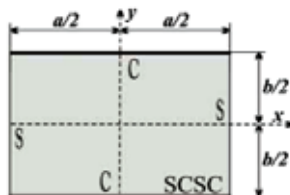
Za odabrane primjere ploča i opterećenja (slike 3. do 6.), funkcije progiba usvojene su u obliku dvostrukog Fourierova reda (19–22), kojima možemo, član po član, zadovoljiti odabrane rubne uvjete i za koji je dokazano da vrlo dobro aproksimiraju deformiranu konfiguraciju, za vrlo široki izbor odnosa dimenzija ploča.



Primjer 1.
rubovi $x = \pm a/2$ slobodno oslonjeni (S)
rubovi $y = \pm b/2$ slobodno oslonjeni (S)

Slika 3. Slobodno oslonjena ploča (Primjer 1: SSSS)

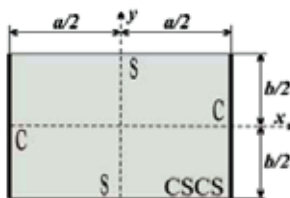
$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \quad (19)$$



Primjer 2.
rubovi $x = \pm a/2$ slobodno oslonjeni (S)
rubovi $y = \pm b/2$ slobodno uklještene (S)

Slika 4. Ploča kombiniranih rubnih uvjeta (Primjer 2: SCSC)

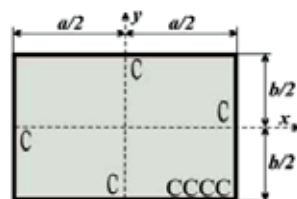
$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) - \cos \frac{(n+1)\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \right) \quad (20)$$



Primjer 3.
rubovi $x = \pm a/2$ uklještene (S)
rubovi $y = \pm b/2$ slobodno oslonjeni (S)

Slika 5. Ploča kombiniranih rubnih uvjeta (Primjer 3: CSCS)

$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \left(\cos \frac{(m-1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \quad (21)$$



Primjer 4.
rubovi $x = \pm a/2$ uklještene (S)
rubovi $y = \pm b/2$ uklještene (S)

Slika 6. Uklještena ploča (Primjer 4: CCCC)

$$w = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s W_{mn} \left(\cos \frac{(m-1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos \frac{(m+1)\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) \right) \cdot \left(\cos \frac{(n-1)\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) - \cos \frac{(n+1)\pi}{b} \left(y + \frac{b}{2}\right) \right) \quad (22)$$

4.2. Deformacijska energija savijanja ploče

Pri određivanju ukupne potencijalne energije sustava u okviru Ritzova energijskog postupka, prvi je korak definiranje deformacijske energije pri savijanju ploče, na uobičajen, tradicijski način:

$$U = \frac{1}{2} D \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (23)$$

gdje je D krutost ploče na savijanje.

4.3. Rad vanjskih sila

Dio potencijalne energije sustava, koji se odnosi na rad vanjskih sila, predstavljen izrazom (24) koji sada sadrži oznake točnih raspodjela naprezanja N_x , N_y i T_{xy} Mathieuove teorije elastičnosti (18):

$$V = -\frac{t}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (24)$$

Dakle, uvođenjem točnih funkcija naprezanja, u čemu je i suštinska razlika u odnosu na sve prethodne analize problema stabilnosti ploča koje nisu isključivo slobodno oslonjene duž svih rubova, izraz za rad vanjskih sila postaje znatno složeniji. Radi pojednostavljenja računalnoga programa, s obzirom na prisutnost velikog broja integrala koji sadrže različite kombinacije hiperboličnih i trigonometrijskih funkcija, sadržanih u funkcijama progiba i naprezanja, bilo je nužno pojednostavniti izraz (24) i razmatrati doprinose pojedinih članova (25, 25a, 25b, 25c):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (25)$$

gdje je:

$$V_1 = -\frac{t}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (25a)$$

$$V_2 = -\frac{t}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy \quad (25b)$$

$$V_3 = -t \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} T_3 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad (25c)$$

5. Primjeri i rezultati

4.4. Svođenje na problem svojstvenih vrijednosti

Nakon definiranja deformacijske energije savijanja ploče U i veličine koja odgovara radu vanjskih sila V, ukupna potencijalna energija sustava može se napisati kao:

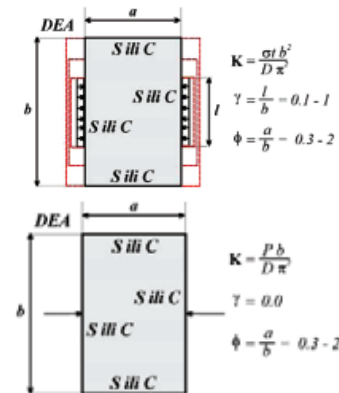
$$\Pi = U + V \quad (26)$$

Iz principa o minimumu potencijalne energije dobiva se uvjet (27),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial U}{\partial W_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial W_{mn}} \quad (27)$$

koji se u suštini svodi na sistem od m·n homogenih linearnih jednačbi prema nepoznatim koeficijentima W_{mn} . Postojanje netrivialnog rješenja, odnosno uvjeta da je determinanta sustava jednaka nuli, svodi se na klasični problem svojstvenih vrijednosti u okviru kojeg jedinu praktičnu važnost za nas ima najniža svojstvena vrijednost, koja i predstavlja traženo kritično opterećenje. Naravno da zbog opsežnosti kompletnog postupka koji izravno ovisi o usvojenom broju članova reda za aproksimiranje funkcija naprezanja i progiba, u postupku rješavanja nužna je uporaba odgovarajućeg računalnog programa (MATHEMATICA).

Kao što je već rečeno, da bismo dokazali upotrebljivost i vrijednost prikazanoga analitičkoga postupka pri razmatranju problema elastične stabilnosti, razmatrana su četiri različita tipa ploča: SSSS, SCSC, CSCS i CCCC (slike 3. do 6.) na koje djeluje lokalno raspoređeno naprezanje (DEA), za koje u literaturi ne postoje analitički rezultati (slika 7.). Svi rezultati za različite odnose dimenzija ($\phi = 0,3 - 2,0$) i djelovanje lokalnog su tlačnog naprezanja ($\gamma = 0,0 - 1,0$) prikazani tablično (tablice 2. do 5.), koje osim koeficijenata izbočenja dobivenih izvedenim analitičkim postupkom, sadrže, radi usporedbe, rezultate proračuna metodom konačnih elemenata (MKE) dobivene primjenom programa FINEL i ANSYS.

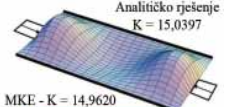
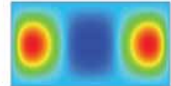
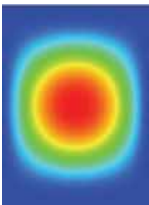
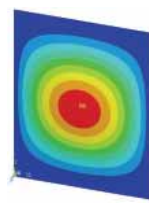
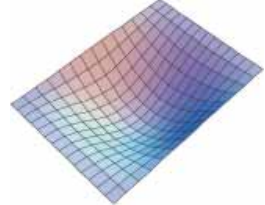
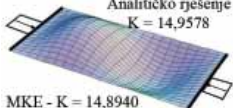
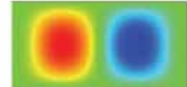


Slika 7. Analizirani primjer

Tablica 2. Vrijednosti koeficijenata izbočivanja u slučaju ploče "SSSS"

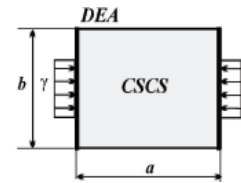
Ploča SSSS $\phi = 0,3 - 2,0$									Primjer $\phi = 2,0; \gamma = 0,3$
	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	$\phi = 1.5$	$\phi = 2.0$	Rezultati	
$\gamma = 0.0$	48.5579	30.0726	24.7160	24.8468	26.0093	29.1098	29.0185	Analičko rješ.	
	48.0267	29.8260	24.4957	24.5922	25.7770	28.8980	28.7950	MKE (FI, AN)	
	(-1.094)	(-0.820)	(-0.891)	(-0.905)	(-0.893)	(-0.728)	(-0.770)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.1$	50.1069	30.4570	24.9336	25.0023	26.1936	29.3081	29.2074	Analičko rješ.	
	49.5980	30.2120	24.7140	24.7770	25.9600	29.0970	28.9840	MKE (FI, AN)	
	(-1.016)	(-0.804)	(-0.881)	(-0.901)	(-0.892)	(-0.720)	(-0.765)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.3$	20.1632	11.1184	8.8846	8.8212	9.2096	10.2697	10.2075	Analičko rješ.	
	19.9840	11.0290	8.8058	8.7418	9.1280	10.1960	10.1300	MKE (FI, AN)	
	(-0.889)	(-0.804)	(-0.887)	(-0.900)	(-0.886)	(-0.718)	(-0.759)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.5$	15.3162	7.7388	6.0090	5.8632	6.0748	6.7109	6.6257	Analičko rješ.	
	15.1950	7.6753	5.9548	5.8102	6.0210	6.6628	6.5761	MKE (FI, AN)	
	(-0.791)	(-0.821)	(-0.902)	(-0.904)	(-0.886)	(-0.717)	(-0.749)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.7$	13.7073	6.6273	5.0489	4.7722	4.8794	5.3243	5.1744	Analičko rješ.	
	13.6020	6.5708	4.9728	4.7290	4.8370	5.2863	5.1370	MKE (FI, AN)	
	(-0.768)	(-0.852)	(-0.918)	(-0.905)	(-0.869)	(-0.714)	(-0.723)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.9$	13.2112	6.2858	4.6330	4.2385	4.2457	4.6016	4.3331	Analičko rješ.	
	13.1050	6.2305	4.5899	4.2005	4.2090	4.5695	4.3038	MKE (FI, AN)	
	(-0.804)	(-0.880)	(-0.930)	(-0.896)	(-0.864)	(-0.697)	(-0.676)	Razlika (%)	
$\gamma = 1.0$	13.2010	6.2500	4.5308	4.0446	4.0000	4.3403	4.0000	Analičko rješ.	
	13.0950	6.1947	4.4887	4.0086	3.9660	4.3106	3.9740	MKE (FI, AN)	
	(-0.803)	(-0.885)	(-0.929)	(-0.890)	(-0.850)	(-0.684)	(-0.648)	Razlika (%)	

Tablica 3. Vrijednosti koeficijenta izbočivanja u slučaju ploča SCSC i CSCS

Ploča SCSC $\phi = 0.3 - 2.0$									
	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	$\phi = 1.5$	$\phi = 2.0$	Rezultati	Primjer $\phi = 2.0; \gamma = 0.3$
$\gamma = 0.0$	48.7433	33.1740	34.0400	41.1378	39.4680	40.6440	41.0340	Analičko rješ.	 Analičko rješenje $K = 15.0397$ MKE - $K = 14.9620$ 
	48.6300	33.1200	33.9914	41.0900	39.4210	40.4030	40.7920	MKE (FI, AN)	
	(-0.232)	(-0.163)	(-0.143)	(-0.116)	(-0.119)	(-0.593)	(-0.590)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.1$	50.3111	33.6731	34.4509	41.6785	39.9466	41.1357	41.5313	Analičko rješ.	
	50.2000	33.6200	34.2360	41.4510	39.7330	40.9010	41.2960	MKE (FI, AN)	
	(-0.221)	(-0.158)	(-0.624)	(-0.546)	(-0.535)	(-0.571)	(-0.567)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.3$	20.3074	12.4985	12.5559	15.2077	14.4908	14.9050	15.0397	Analičko rješ.	
	20.2667	12.4800	12.4800	15.1310	14.4190	14.8270	14.9620	MKE (FI, AN)	
	(-0.201)	(-0.148)	(-0.604)	(-0.504)	(-0.495)	(-0.523)	(-0.517)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.5$	15.5533	8.9588	8.7929	10.5539	9.9820	10.2147	10.2723	Analičko rješ.	
	15.5267	8.9456	8.7414	10.5030	9.9347	10.1650	10.2240	MKE (FI, AN)	
	(-0.171)	(-0.147)	(-0.586)	(-0.482)	(-0.474)	(-0.486)	(-0.470)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.7$	14.1556	7.9297	7.5893	8.9950	8.4330	8.4768	8.4607	Analičko rješ.	
	14.1317	7.9177	7.5457	8.9526	8.3942	8.4396	8.4253	MKE (FI, AN)	
	(-0.168)	(-0.151)	(-0.574)	(-0.472)	(-0.460)	(-0.439)	(-0.418)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.9$	13.8716	7.6874	7.1305	8.2673	7.8284	7.5142	7.4138	Analičko rješ.	
	13.8481	7.6756	7.0897	8.2300	7.7928	7.4854	7.3876	MKE (FI, AN)	
	(-0.169)	(-0.153)	(-0.572)	(-0.451)	(-0.455)	(-0.383)	(-0.353)	Razlika (%)	
$\gamma = 1.0$	13.9044	7.6927	7.0021	7.8583	7.6927	7.1172	6.9729	Analičko rješ.	
	13.8822	7.6812	6.9624	7.8234	7.6586	7.0923	6.9511	MKE (FI, AN)	
	(-0.160)	(-0.149)	(-0.567)	(-0.438)	(-0.443)	(-0.350)	(-0.312)	Razlika (%)	
Oblik izbočivanja SCSC (slučaj $\phi = 0.7; \gamma = 0.3$)	MKE – FINEL (K = 12.4800)			MKE – ANSYS (K = 12.5401)				Analičko rješenje (K = 12.5559)	
									
Ploča CSCS $\phi = 0.3 - 2.0$									
	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	$\phi = 1.5$	$\phi = 2.0$	Rezultati	Primjer $\phi = 2.0; \gamma = 0.3$
$\gamma = 0.0$	136.527	81.3980	58.0843	48.8844	47.3130	47.6780	43.952	Analičko rješ.	 Analičko rješenje $K = 14.9578$ MKE - $K = 14.8940$ 
	136.390	81.3460	58.0414	48.8433	47.2680	47.4730	43.741	MKE (FI, AN)	
	(-0.100)	(-0.064)	(-0.074)	(-0.084)	(-0.095)	(-0.430)	(-0.480)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.1$	143.156	82.9067	58.6814	49.2515	47.6257	47.8902	44.0682	Analičko rješ.	
	143.111	82.8760	58.4730	49.0760	47.4510	47.6950	43.8630	MKE (FI, AN)	
	(-0.031)	(-0.037)	(-0.355)	(-0.356)	(-0.367)	(-0.408)	(-0.466)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.3$	61.9592	30.9996	20.9747	17.3066	16.6288	16.4781	14.9578	Analičko rješ.	
	61.9370	30.9907	20.9060	17.2480	16.5710	16.4160	14.8940	MKE (FI, AN)	
	(-0.036)	(-0.029)	(-0.328)	(-0.339)	(-0.347)	(-0.377)	(-0.426)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.5$	50.7689	22.0930	14.1475	11.3570	10.7786	10.4280	9.2197	Analičko rješ.	
	50.7511	22.0864	14.1010	11.3190	10.7420	10.3900	9.1821	MKE (FI, AN)	
	(-0.035)	(-0.030)	(-0.329)	(-0.335)	(-0.340)	(-0.364)	(-0.408)	Razlika (%)	

Tablica 3. - nastavak - Vrijednosti koeficijenta izbočivanja u slučaju ploča CSCS

$\gamma = 0.7$	47.5762	19.1541	11.7280	9.0741	8.4494	7.8059	6.7607	Analičko rješ.
	47.5587	19.1469	11.6880	9.0437	8.4205	7.7774	6.7335	MKE (FI, AN)
	(-0.037)	(-0.038)	(-0.341)	(-0.335)	(-0.342)	(-0.365)	(-0.402)	Razlika (%)
$\gamma = 0.9$	46.4395	18.2268	10.7562	7.9292	7.1948	6.0301	5.3557	Analičko rješ.
	46.4173	18.2182	10.7180	7.9018	7.1703	6.0082	5.3341	MKE (FI, AN)
	(-0.048)	(-0.047)	(-0.355)	(-0.345)	(-0.340)	(-0.363)	(-0.403)	Razlika (%)
$\gamma = 1.0$	46.5122	18.1874	10.5300	7.5422	6.7432	5.3748	4.8472	Analičko rješ.
	46.4922	18.1800	10.4920	7.5160	6.7196	5.3551	4.8275	MKE (FI, AN)
	(-0.043)	(-0.041)	(-0.361)	(-0.347)	(-0.350)	(-0.366)	(-0.406)	Razlika (%)



Tablica 4. Vrijednosti koeficijenta izbočivanja u slučaju ploče CCCC

Ploča CCCC $\phi = 0.3 - 2.0$									
	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.5$	$\phi = 0.7$	$\phi = 0.9$	$\phi = 1.0$	$\phi = 1.5$	$\phi = 2.0$	Rezultati	Primjer $\phi = 2.0; \gamma = 0.3$
$\gamma = 0.0$	136.507	81.9980	63.9057	64.4689	67.1260	63.8240	64.5070	Analičko rješ.	
	136.390	81.9460	63.8686	64.4322	67.0660	63.6270	64.2230	MKE (FI, AN)	
	(-0.086)	(-0.063)	(-0.058)	(-0.057)	(-0.089)	(-0.309)	(-0.440)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.1$	143.156	83.5588	64.6723	65.0843	67.7444	64.2124	64.8332	Analičko rješ.	
	143.111	83.5280	64.4790	64.9180	67.5360	64.0360	64.5890	MKE (FI, AN)	
	(-0.031)	(-0.037)	(-0.299)	(-0.255)	(-0.308)	(-0.275)	(-0.377)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.3$	61.9592	31.3774	23.3818	23.1485	24.0774	22.3021	22.3698	Analičko rješ.	
	61.9370	31.3693	23.3210	23.0960	24.0120	22.2540	22.3150	MKE (FI, AN)	
	(-0.036)	(-0.026)	(-0.260)	(-0.227)	(-0.272)	(-0.217)	(-0.245)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.5$	50.7778	22.5921	16.0615	15.4186	16.1085	14.2605	14.1285	Analičko rješ.	
	50.7600	22.5864	16.0210	15.3860	16.0660	14.2320	14.1000	MKE (FI, AN)	
	(-0.035)	(-0.025)	(-0.252)	(-0.211)	(-0.264)	(-0.200)	(-0.202)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.7$	47.6841	19.9012	13.5669	12.4490	12.7037	10.9178	10.6209	Analičko rješ.	
	47.6667	19.8949	13.5320	12.4230	12.6770	10.8970	10.6000	MKE (FI, AN)	
	(-0.036)	(-0.032)	(-0.257)	(-0.209)	(-0.210)	(-0.191)	(-0.197)	Razlika (%)	
$\gamma = 0.9$	46.8778	19.2366	12.6253	10.9173	10.7885	9.0356	8.6047	Analičko rješ.	
	46.8580	19.2289	12.5920	10.8940	10.7660	9.0180	8.5880	MKE (FI, AN)	
	(-0.042)	(-0.040)	(-0.264)	(-0.213)	(-0.209)	(-0.195)	(-0.194)	Razlika (%)	
$\gamma = 1.0$	47.0944	19.3406	12.4458	10.3857	10.0760	8.3521	7.8686	Analičko rješ.	
	47.0756	19.3340	12.4140	10.3650	10.0560	8.3362	7.8536	MKE (FI, AN)	
	(-0.040)	(-0.034)	(-0.255)	(-0.202)	(-0.198)	(-0.190)	(-0.191)	Razlika (%)	
Oblik izbočivanja CCCC (slučaj $\phi = 2.0; \gamma = 0$)	Analičko rešenje K= 64,507							MKE (FINEL) K= 64,223	

Radi prikladne je ocijene ostvarenih analitičkih rješenja treba navesti određena ograničenja koja su, iz praktičnih razloga, morala biti uvedena. Naime, koeficijenti izbočenja, prikazani u navedenim tablicama, dobiveni su isključivo uvođenjem po 20 članova reda funkcija progiba i 60 članova reda funkcija naprezanja. S gledišta funkcija naprezanja, apsolutna stabilnost rješenja postiže se s 40 i više članova, dok je u slučaju funkcija progiba, ovisno o rubnim uvjetima i opterećenju, ponekad poželjan i doprinos većeg broja članova. Ograničavanjem broja članova, dobiveno je rješenje nešto iznad točnog koje bi, naravno, bilo dostižno kada bi bili u mogućnosti uvesti beskonačno mnogo članova reda. Međutim, zbog iznimne složenosti postupka i velikog broja integrala koje treba riješiti, analiza je napravljena s 20 članova reda funkcije progiba, za sve dimenzije ploča, rubne uvjete i spomenutanormalnim opterećenjem.

Nakon detaljne analize prikazanih rezultata moguće je procijeniti točnost uvedenih pretpostavki i to ne samo Ritzove metode, nego i parametara proračuna unutar metode koji izravno utječu na konvergenciju i stupanj točnosti rješenja.

6. Zaključak

Detaljnijom analizom prikazanih rezultata (tablice 2. do 5.) lako je uočiti iznimno dobro ponašanje analitičkog

rješenja u razmatranom opsegu dimenzija ploča ($\phi = 0,3 - 2,0$) i opterećenja ($\gamma = 0,0 - 1,0$). Prikazane vrijednosti koeficijenta izbočenja za četiri odabrana tipa ploča (SSSS, SCSC, CSCS i CCCC) pri lokalno raspoređenom tlačnom naprezanju, pokazuju maksimalno odstupanje u odnosu na vrijednosti ostvarene primjenom metode konačnih elemenata od svega 1,0 %. (SSSS $\phi = 0,3$ i $\gamma = 0,0$). Međutim i ta se razlika mora shvatiti relativno jer za isti primjer primjenom programa ANSYS dobivena vrijednost ($K=48,482$) odstupa samo 0,16% od analitičkog rješenja. Drugim riječima, rješenja dobivena metodom konačnih elemenata (FINEL, ANSYS) ovise o gustoći mreže i o usvojenom tipu konačnog elementa i imaju svoja ograničenja što se tiče stupnja točnosti, kao i ovdje prikazan analitički postupak zbog ograničenog broja članova reda. Konačno, može se zaključiti da je za navedene slučajeve ploča mješovitih rubnih uvjeta pod djelovanjem promjenjivoga tlačnog opterećenja usvojen broj članova reda funkcija progiba i naprezanja dovoljan. Naravno da je u inačicama sa složenijim tipovima opterećenja, koja su također bila predmetom detaljnih provjera, nužno posvetiti posebnu pozornost pravilnom odabiru vrste i broja članova reda, i funkcije naprezanja odnosno progiba, što nesumnjivo izravno utječe na stupanj točnosti ostvarenih rješenja, ali ne i na primjenjivost izvedenoga analitičkog postupka.

LITERATURA

- [1] Mathieu, E. 1890, *Theorie de l'elasticite des corps solides*, Seconde partie. Gauthier-Villars, Paris.
- [2] Baker, G. & Pavlović, M. N. 1982, *Elastic stability of simply supported rectangular plates under locally distributed edge forces*, Journal of Applied Mechanics 104, pp. 177-179.
- [3] Baker, G. & Pavlović, M. N. 1983, *Rectangular plates compressed by series of in-plane loads: stability and stress distribution*, The Aeronautical Journal 87, pp. 183-188.
- [4] Pavlović, M. N. & Baker, G. 1983, *Buckling of non-uniformly compressed plates*. Theo. & Appl. Mech., Trans. Yugosl. Soc. Mech., vol. 9, pp. 91-104.
- [5] Baker, G. & Pavlović, M. N. 1985, *Stability of wide strips under locally distributed forces*, Journal of Applied Mechanics 107, pp. 232-234.
- [6] Baker, G., Pavlović, M. N. & Tahan, N. 1993, *An exact solution to the two-dimensional elasticity problem with rectangular boundaries under arbitrary edge forces*, Phil. Trans. R. Soc. London, A 393, pp. 307-336.
- [7] Liu, Y. G. 2006, *Buckling of Plates under Non-Uniform Stresses, with Particular Emphasis on Shear*, Ph. D Thesis, Imperial College, London.
- [8] Mijušković O. 2008, *Analiza stabilnosti pravougaonih ploča korišćenjem tačne funkcije napona*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd.