

Primljen / Received: 24.2.2023.

Ispravljen / Corrected: 14.5.2023.

Prihvaćen / Accepted: 23.6.2023.

Dostupno online / Available online: 10.10.2023.

Primjena načela energije u izračunavanju odziva viskoelastičnih štapova

Autori:

Doc.dr.sc. **Gülçin Tekin**, dipl.ing.građ.

Tehničko sveučilište Yıldız

Davutpaşa Campus

Istanbul, Turska

Odjel za građevinarstvo

gulcint@yildiz.edu.tr

Autor za korespondenciju

Prof.dr.sc. **Fethi Kadioğlu**, dipl.ing.građ.

Tehničko sveučilište u Istanbulu

Ayazağa Campus

Odjel za građevinarstvo

Istanbul, Turska

fkadioglu@itu.edu.tr

Pregledni rad

Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu

Primjena načela energije u izračunavanju odziva viskoelastičnih štapova

Za široki je raspon praktičnih problema u građevinarstvu teško pronaći točna rješenja. Razlog je tome u složenosti diferencijalnih jednadžbi koje opisuju problem ili u poteškoćama koje proizlaze iz rubnih i početnih uvjeta. Kao alternativni pristup rješavanju tih problema primjenjuju se skalarni veličine poput rada i energije. Načelo virtualnoga rada osnova je energijskih i varijacijskih pristupa. U ovom je istraživanju pomoću energijske formulacije viskoelastičnih konstrukcija obrađen problem statički neodređenoga viskoelastičnog aksijalno opterećenoga štapa. Za analizu je predložena jednostavna i učinkovita formulacija utemeljena na energiji. Izraz za ukupnu potencijalnu energiju u ovisnosti o pomacima čvorova izveden je u Laplaceovom prostoru. Rješenja koja smanjuju ukupnu potencijalnu energiju stvarni su pomaci, a inverzna Laplaceova transformacija primijenjena je za preslikavanje funkcije nazad u vremensku domenu. Analizirani su različiti primjeri kako bi se osigurala točnost i prikazao potencijal predložene metode. Ovom se metodom rješenje može dobiti neposredno u nekoliko jednostavnih koraka, neovisno o promjeni modela viskoelastičnoga materijala, broju elemenata u sistemu i vrsti opterećenja.

Ključne riječi:

viskoelastičnost, analiza ovisna o vremenu, načelo potencijalne energije, statički neodređen, Laplaceova domena, inverzna Laplaceova transformacija

Research Paper - Subject review

Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu

Energy principle application to response of viscoelastic bars

A wide range of practical engineering problems exists for which obtaining exact solutions directly is challenging. This is because of the complex nature of the governing differential equations or the difficulties arising from the boundary and initial conditions of the problem. To address these problems, scalar quantities, such as work and energy, are used as an alternative approach. The virtual work principle constitutes the basis for the energy and variational formulations. This study uses energy concepts to formulate viscoelastic structures and discuss the statically indeterminate axially loaded viscoelastic bar problem. A simple and efficient energy-based formulation for analysis is proposed. The total potential energy (TPE) expression in terms of the displacements of the nodes was obtained in Laplace space. The solutions that minimise the TPE expression are real displacements, and the inverse Laplace transform method is applied to transform the function back into the time domain. Different examples were considered to ensure accuracy and demonstrate the potential of the proposed solution technique. This method is convenient for obtaining a solution directly by following a few simple process steps, regardless of the change in the viscoelastic material model, the number of elements in the system, and the type of loading.

Key words:

viscoelastic, time-dependent analysis, potential energy principle, statically indeterminate, Laplace domain, inverse Laplace

1. Uvod

Ponašanje linearnoelastičnoga materijala najjednostavnija je i najčešća idealizacija materijala. Većina materijala, kao što su polimeri, metali na visokim temperaturama, drvo te živo tkivo i stanice pokazuju osobine elastičnosti i viskoznosti. Takva su svojstva poznata pod nazivom viskoelastičnosti. Trenutna elastičnost, puzanje, relaksacija naprezanja, trenutni elastični oporavak, zaostali oporavak i trajne ili viskozne deformacije karakteristični su za viskoelastična tijela. Na deformacije viskoelastičnih materijala utječu brzina i trajanje opterećivanja. Odgovarajuće modeliranje ponašanja ovisnoga o vremenu ključno je za točnu analizu konstrukcija izrađenih od viskoelastičnih materijala. Za matematičko modeliranje ponašanja viskoelastičnih materijala upotrijebljeni su mehanički analogoni sastavljeni od opruga i prigušivača. Opruga i prigušivač osnovni su elementi koji se primjenjuju za modeliranje elastičnoga i viskoznoga ponašanja viskoelastičnih materijala. Različiti serijski i/ili paralelni sklopovi opruga i prigušivača primjenjuju se za opisivanje različitih linearnoviskoelastičnih materijala.

Za građevinske se konstrukcije upotrebljavaju različite metode klasifikacije. Najuobičajenija klasifikacija temelji se na kombinaciji geometrijske konfiguracije i načina opterećivanja konstrukcije. S geometrijskoga je stajališta najjednostavnija konstrukcija štap. Ovisno o tome je li opterećenje vlačno, tlačno, torzijsko ili fleksijsko, štap se često naziva i zglobnim štapom, gredom ili stupom.

Linearna viskoelastičnost primjenjuje se u konstrukcijskoj analizi materijala ovisnih o vremenu. Laplaceova transformacija, Fourierova transformacija i načelo korespondencije (analogija elastičnosti i viskoelastičnosti) primjenjuju se za analiziranje viskoelastičnih problema. Laplaceova transformacija primijenjena je na viskoelastične grede u knjizi [1]. U knjizi [2] je u rješavanju jednadžbi viskoelastične grede primijenjeno načelo elastično-viskoelastične korespondencije. Christensen je pak u knjizi [3] problem viskoelastične grede analizirao pomoću Fourierove transformacije. Nekoliko je istraživanja prevedeno o statičkim i dinamičkim analizama viskoelastičnih grednih konstrukcija. Analiza kvazistatičkoga i dinamičkoga ponašanja linearnoviskoelastične i klasične Timošenkovske grede prevedena je u radu [4] pomoću Pronyjevih redova. Vremenski članovi uklonjeni su primjenom hibridne Laplaceove transformacije. Na temelju Hamiltonovoga načela moguće je bez integralne transformacije metodom konačnih elemenata dobiti rješenje. Istraživanje [5] izvijestilo je o analizi kvazistatičkoga i dinamičkoga ponašanja viskoelastične Timošenkovske grede pomoću hibridne Laplace-Carsonove metode i metode konačnih elemenata. U istraživanju je primijenjen nasljedni integralni prikaz konstitucijskih relacija. U numeričkim primjerima upotrebljavaju se Kelvinovi i troparametarski čvrsti modeli, dok se za numeričku Laplaceovu inverziju primjenjuju Fourierovi redovi i Schaperyjeva metoda.

Od numeričkih metoda koje se primjenjuju u viskoelastičnosti, najuobičajenija i najsvestranija jest metoda konačnih

elemenata. Nekoliko je autora prikazalo primjenu metode konačnih elemenata u analizama viskoelastičnih greda. U radu [6] prikazan je postupak utvrđivanja prolazni odziv sistema viskoelastičnih greda. U analizi je upotrijebljen model konačnih elemenata s višestrukim stupnjevima slobode. Brza Fourierova transformacija primijenjena je za transformaciju jednadžbe iz frekvencijske u vremensku domenu. U radu [7] proučavani su modeli konačnih elemenata za viskoelastične grede utemeljeni na različitim kinematičkim pretpostavkama. U izvođenju jednadžbi primijenjeno je Hamiltonovo načelo. Rezultati se preslikavaju u vremensku domenu numeričkom inverzijom. U radu [8] predložen je slojeviti model konačnih elemenata utemeljen na Golla-Hughesovoj metodi. Predložena formulacija temelji se na jednadžbama drugoga reda u vremenskoj domeni dobivenima transformacijom jednadžbi gibanja u Laplaceovoj domeni. Parametri koji karakteriziraju viskoelastični materijal utvrđeni su eksperimentalno. U radu [9] razvijen je model s konačnim elementima ljske za rješavanje slobodnih vibracija viskoelastičnih uslojenih greda. Opća formulacija problema riješena je primjenom različitih diskretizacija konačnih elemenata uzimajući u obzir njihova ograničenja. U radu [10] razvijen je model konačnih elemenata utemeljen na teoriji posmičnih deformacija prvoga reda i Hamiltonovom načelu za analizu vibracija uslojene grede s jezgrom od viskoelastičnoga materijala između dva elastična sloja. Pri izvođenju jednadžbi konačnih elemenata pretpostavljeno je da nema relativnoga klizanja između slojeva, a učinak momenta inercije nije uzet u obzir. Rezultati numeričkih proračuna potvrđeni su eksperimentalnom provjerom viskoelastične uslojene konzolne grede. U [11] primijenjeni su analitički i numerički modeli za predviđanje graničnih stanja uporabljivosti savojnih armiranobetonskih elemenata. Gredni elementi ispitani su i pod kratkotrajnim i pod dugotrajnim savojnim opterećenjem. U analizi su primijenjena dva različita matematička modela, to jest model konačnih elemenata grede (1D analiza) i model s elementima za ravninsko naprezanje (2D analiza). Za dugoročnu analizu u oba modela vremenski ovisni učinci ponašanja betona, puzanje i skupljanje, prikazani su kao viskoelastično ponašanje betona. Numerički i analitički modeli provjereni su uporabom postojećih eksperimentalnih podataka. U literaturi postoje brojna istraživanja koja se bave vibracijskim svojstvima i stabilnošću viskoelastičnih greda [12-25].

Cilj je ovog rada primijeniti načelo ukupne potencijalne energije za određivanje viskoelastičnoga ponašanja štapnih konstrukcija. Načelo ukupne potencijalne energije ima široku primjenu i primjenjivo je za konstrukcije koje su klasificirane na temelju kombinacije geometrijskih konfiguracija i obilježja opterećenja, kao što su grede, okviri, ploče i ljske. Međutim, pretpostavlja se da su te konstrukcije elastične (to jest, intenziteti odziva, kao što su naprezanje i pomicanje, proporcionalni su intenzitetu primijenjenog opterećenja).

U početku su istraživači ponajviše bili usmjereni na elastične probleme. Međutim, budući da viskoelastične materijale u praksi karakterizira široka lepeza primjene, potreba je za proučavanjem viskoelastičnih problema porasla. Uz pretpostavku da je

materijal elastičan pojednostavljuvanja analize ne odgovaraju stvarnome stanju jer većina inženjerskih materijala pokazuje vidljive vremenske učinke i viskoelastični su zbog unutarnjeg trenja. Stoga su viskoelastične konstitutivne relacije realističnije od elastičnih u odražavanju ponašanja materijala. Proučavanju svojstva viskoelastičnoga materijala ovisnoga o vremenu i stvaranju temelja za stvarnu konstrukcijsku analizu pridana je velika pozornost u istraživanju. Autorica i suradnici objavili su istraživanja posvećena primjeni jednostavnoga i učinkovitoga postupka proračuna u analizama kvazistatičkoga i dinamičkoga ponašanja viskoelastičnih konstrukcijskih elemenata temeljenoga na Gateauxom diferencijalu. Nove funkcionalne primjerene mješovitim formulacijama za konačne elemente u Laplace-Carsonovoj domeni razvili su u [26] za viskoelastične Kirchhoffove ploče i u [27] za Mindlin-Reissnerove ploče s posmikom prvoga reda.

Povod za ovo istraživanje proizašao je iz pretraživanja literature. Načela rada i energije temeljna su i čine osnovu raznih približnih metoda analize. Za razliku od opsežnih istraživanja o razvoju i primjeni metoda rada i energije za analizu elastičnih konstrukcijskih elemenata, ovo istraživanje predlaže načelo ukupne energije za probleme viskoelastičnosti. Kao što je poznato, ne postoji eksplicitni prikaz ukupne energije za viskozne sustave u vremenskoj domeni jer viskozni član ima nekonzervativnu ulogu u konstrukcijskom sistemu. Općenito, načelo virtualnoga rada uspostavlja se za viskoelastične probleme u proračunima u vremenskoj domeni. U ovom je radu pokazano da eksplicitni prikaz ukupne energije za viskozne probleme može postojati u Laplaceovoj domeni.

U određenim je slučajevima procjena viskoelastičnosti dovoljno složena jer izračunavanje ponašanja progresivnih deformacija (to jest problemi puzanja, relaksacije i histereze) tijekom dugotrajnoga konstrukcijskoga odziva uključuje matematičku složenost. Glavni cilj je ovoga istraživanja rasprava o linearnom viskoelastičnom ponašanju štapnih konstrukcija primjenom načela rada i energije. Ovo je prvo istraživanje koje predstavlja novu, jednostavnu i učinkovitu na energiji utemeljenu formulaciju za analizu statički neodređenih viskoelastičnih štapnih konstrukcija. Teorijska je podloga predložene formulacije jednostavna i može se lako provesti u praksi, a pokazala se učinkovitom za dobivanje rezultata bilo kojega konstitutivnog modela linearne viskoelastičnosti. Glavna je prednost predložene metode u tome što se skup jednadžbi koje treba riješiti može ponovno izvesti u nekoliko jednostavnih koraka u ovisnosti o vrstama modela viskoelastičnih materijala, opterećenja, geometrije i broju elemenata u koje je sistem podijeljen. U ovom su radu prikazana vrlo točna rješenja za statički određene i neodređene viskoelastične sisteme. Za dobivanje točnijih rezultata u analizi konačnim elementima ključna je primjena finije mreže; međutim, fina mreža često oduzima puno vremena. Bez obzira na broj poddomena (elemenata) na koje je tijelo podijeljeno predložena metoda daje zadovoljavajuće rezultate i štedi vrijeme. Za razvoj konstitutivskih jednadžbi viskoelastičnosti primijenjeni su Kelvin-Voightov model i

standardni linearni model za čvrsta tijela. Na temelju svojstava konvolucije Laplaceove transformacije, načelo minimalne potencijalne energije primijenjeno je za analizu statički neodređenoga aksijalno opterećenoga štapnog sistema. Budući da su odgovarajuće jednadžbe ovisne o vremenu, predložena je metoda rješenja. Za provjeru predložene formulacije upotrijebljeno je nekoliko primjera. Ovo istraživanje započinje jednostavnom štapnom konstrukcijom i vodi autoricu i njezine suradnike kroz sve složenije zadatke u mehanici čvrstoga tijela, kao što su primjerice viskoelastični sklopovi dvaju ili više štapova izloženih savijanju te posmičnom i aksijalnom opterećenju, koji se nazivaju okvirima, ili izloženih samo aksijalnim silama, koji se nazivaju ravninskim ili prostornim rešetkama, kao i kroz zadatke koji uključuju deformacije, stabilnost i vibracije viskoelastičnih tijela. Metodologija opisana u ovom radu može se lako primijeniti na analizu različitih viskoelastičnih nosivih elemenata. Jednostavna je, pouzdana i učinkovita sa stajališta proračuna, a rezultati su joj točni. Rezultati ovoga istraživanja mogu poslužiti kao mjerilo za buduća istraživanja.

2. Metodologija

Dva su različita pristupa u analizi građevinskih konstrukcija. Jednom je pristupu cilj opisati stanja naprežanja i deformacija po cijeloj konstrukciji integriranjem diferencijalnih jednadžbi koje zadovoljavaju odgovarajuće rubne uvjete. Iako je takav pristup općenit, analitička se integracija gotovo uvijek čini nemogućom. Drugi pristup uključuje uporabu skalarnih veličina kao što su rad i energija. Prvi zakon termodinamike tvrdi da je zbroj mehaničke energije W_E i toplinske energije Q dovedene termodinamičkom sustavu jednak zbroju kinetičke energije T i unutarnje energije U :

$$W_E + Q = T + U \quad (1)$$

Uz pretpostavku da je deformiranje adijabatski proces, $Q = 0$. Osim toga, pretpostavlja se da je opterećivanja vrlo sporo (kvazistatičko) i da se stanje ravnoteže održava, tako da je $T = 0$. Na temelju tih pretpostavaka prvi je zakon drugi izraz za očuvanje energije:

$$W_E = U \quad (2)$$

Rad vanjskih sile tijekom opterećivanja (W_E) može se prikazati kao površina ispod krivulje sile:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3)$$

Nanesena sila, označena s F , može biti koncentrirana ili raspodijeljena, a može biti i moment. Prema tome, F i x poopćena su sila i pomak.

Treba izvesti izraz za unutarnju energiju U (nazvanu i energijom deformacije ili deformacijskom energijom). Rad vanjskoga opterećenja pohranjuje se kao energija deformacije (unutarnja energija) U . Da bi se odredila energija deformacije, treba

definirati ponašanje materijala; pa će deformacijska energija biti izražena u ovisnosti o naprezanju. Vremenska ovisnost viskoelastičnoga odziva mnogo je izraženija od one kod elastičnoga odziva čvrstih tvari i viskoznoga odziva tekućina. Na krivulji odnosa naprezanja i deformacija viskoelastičnoga materijala opaža se histereza, a krutost materijala ovisi o brzini deformacije $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ ili brzini naprezanja $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$. Pod pretpostavkom da je riječ o linearnoviskoelastičnom materijalu, dolazi do povrata mehaničkoga rada koji su izvršile nanosene sile, a energija izgubljena tijekom ciklusa opterećenja jednaka je ploštini površine unutar petlje, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Krivulja naprezanja i opterećenja viskoelastičnog materijala

Novorazvijeni materijali pokazuju mehanička svojstva koja nisu ni savršeno elastična niti odgovaraju idealizaciji viskozne tekućine. Mehanička energija može se pohraniti u potpuno elastičnim materijalima bez gubitka energije. S druge strane, idealna stvarna (viskozna) tekućina može raspršiti cjelokupnu ulaznu energiju u stanju nehidrostatskoga naprezanja. Viskoelastični materijali imaju sposobnost i pohranjivanja i raspršivanja energije. Konstitucijske jednadžbe vremenski ovisnih (viskoelastičnih) materijala uključuju naprezanje, deformaciju i vremenske varijable. Pri definiranju konstitucijskih jednadžbi mogu se primijeniti integrali ili diferencijalne jednadžbe. Jednodimenzionalni viskoelastični konstitucijski odnos u integralnom obliku, uzimajući u obzir Boltzmannovo načelo superpozicije, izražava se na sljedeći način:

$$\sigma(t) = M(t)\varepsilon(0^+) + \int_{0^+}^t M(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = C(t)\sigma(0^+) + \int_{0^+}^t C(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau \quad (5)$$

gdje $M(t)$ označava relaksacijski modul, a $C(t)$ funkciju podatljivosti; oboje se mijenja s proteklom vremenom t . Ovisnost o temperaturi izostavljena je na temelju pretpostavke o ujednačenoj temperaturi.

Izrazi (4) i (5) pokazuje da materijal ima pamćenje; drugim riječima, odziv materijala određuje se trenutnom vrijednošću djelovanja uz sva prošla djelovanja.

Integral konvolucije omogućuje da se viskoelastične konstitucijske jednadžbe napišu kao za elastičnost [28]:

$$\sigma(t) = M(t-\tau)*d\varepsilon(\tau) = M*d\varepsilon \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = C(t-\tau)*d\sigma(\tau) = M*d\sigma \quad (7)$$

Budući da konstitucijske jednadžbe linearnoviskoelastičnoga materijala odgovaraju integralima konvolucije, može se primijeniti Laplaceova transformacija za pretvorbu u algebarske jednadžbe. Laplaceova transformacija za bilo koju po dijelovima neprekidnu funkciju $f(t)$ definirana je na sljedeći način:

$$L(f(t)) = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

Primjenom dvaju svojstava Laplaceove transformacije (koje se nazivaju transformacije derivacija u jednadžbi (A.1) i konvolucija jednadžbe (A.2); vidjeti Prilog) konstitucijske se jednadžbe mogu izraziti u sljedećem algebarskom obliku:

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{M}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}(s) = s\bar{C}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (10)$$

gdje s označava Laplaceovu varijablu, dok su $\bar{\sigma}(s)$, $\bar{\varepsilon}(s)$, $\bar{M}(s)$ i $\bar{C}(s)$ funkcije varijable s . Povezivanjem jednadžbi (9) i (10) u jedan algebarski izraz dobiva se jednostavna formula između funkcije podatljivosti i relaksacijskoga modula u Laplaceovoj domeni

$$\bar{M}(s)\bar{C}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (11)$$

Energija deformacije po jedinici volumena odgovara gustoći energije deformacije, pa se može izraziti kao integral na intervalu $(0, t)$ [28]:

$$U_v = \frac{1}{2} \int_{\tau=0}^t \left[\int_{s=0}^t M(s-\tau) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \right] \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (12)$$

3. Načelo ukupne potencijalne energije (TPE)

Primjena varijacijskoga načela u nekim grana mehanike ima dugu povijest razvoja. Račun varijacija svodi se na određivanje funkcije koja je stacionarna vrijednost zadanoga funkcionala [29].

Načelo virtualnoga rada, koje se naziva i načelom virtualnih pomaka, osnova je varijacijske formulacije. Treba napomenuti da se načelo virtualnoga rada primjenjuje neovisno o konstitucijskim relacijama materijala, dok se pri formuliranju varijacijskih načela moraju uzeti u obzir odnosi naprezanja i deformacija.

U ovom će se poglavlju načelo ukupne potencijalne energije (engl. *Total potential energy* - TPE) izvesti iz načela virtualnoga rada

$$\delta W_E = \delta U \quad (13)$$

Načelo virtualnoga rada ekvivalentno je jednadžbama ravnoteže sistema, a vanjski virtualni rad δW_E koji vrše stvarne sile tijekom virtualnoga pomicanja jednak je unutarnjem virtualnom radu δU koji vrše stvarna naprezanja tijekom virtualnoga deformiranja. Pri tome je simbol δ operatora varijacije. Izraz (13) se može napisati u sljedećem obliku, gdje je δ virtualni operator:

$$\delta U - \delta W_E = \delta(U - W_E) = 0 \quad (14)$$

Pritom je

$$(U - W_E)_i = \Pi \quad (15)$$

$$\delta \Pi = 0 \quad (16)$$

Π označava ukupnu potencijalnu energiju konstrukcije. Načelo izraženo izrazom (16) kaže da je između svih pomaka koji zadovoljavaju zadane rubne uvjete stvarni pomak onaj koji minimizira ukupnu potencijalnu energiju.

4. Primjena ukupne potencijalne energije u određivanju vremenski ovisnih pomaka statički neodređenih sistema viskoelastičnih aksijalno opterećenih štapova

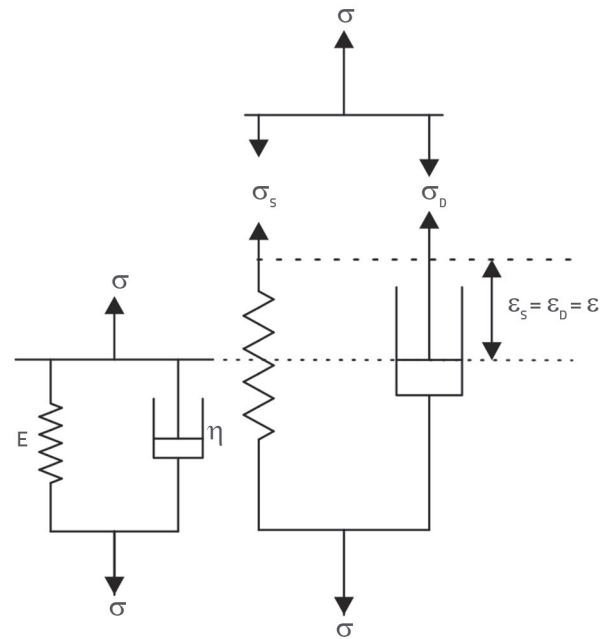
Najjednostavnija primjena načela ukupne potencijalne energije određivanje je pomaka statički neodređenoga viskoelastičnoga štapa pod vremenski promjenjivim aksijalnim opterećenjem. Odabir ovog primjera s jedne strane služi kao ilustracija argumenata na kojima se temelji ova metoda, a s druge je strane, prema spoznajama autora, ovo prvo istraživanje koje se bavi analizom statički neodređenih štapova (samo pod aksijalnim opterećenjem) koje pokazuju viskoelastična svojstva sustavnim postupkom koji je utemeljen na načelu energije.

Za linearnoviskoelastični materijal mora se odrediti konstitucijska relacija. Viskoelastično ponašanje može se modelirati jednostavnim mehaničkim analogonima kao što su linijske opruge i prigušivači. Jednostavni reološki modeli koji imaju široku primjenu u teorijskim istraživanjima sastavljeni su od sustava opruga i prigušivača, spojenih paralelno ili serijski. Maxwellov model serijski je raspored, a ponaša se kao fluid. Kelvin-Voigtov model (slika 2.) paralelnom je rasporedu, a ponaša se kao čvrsti materijal.

Konstitucijska relacija za Kelvin-Voigtov model za čvrste materijale linearna je diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (17)$$

Izraz (17) sadrži derivacije po vremenu. Naprezanja i deformacije stoga nisu bili proporcionalni. Slika 3. prikazuje statički neodređeni viskoelastični štapa duljine L s upetim ležajevima na oba kraja koji je opterećen s dvije aksijalne sile P_1 i P_2 (ta aksijalna opterećenja mogu biti zadana kao funkcije vremena ili konstanta) u $x = L_1$, odnosno $x = L_1 + L_2$.



Slika 2. Schematski prikaz Kelvin-Voigtovoga modela i ravnoteže sile

Analizirat ćemo samo jednostavniji slučaj: ploština poprečnoga presjeka A ne ovisi o x . Uzet ćemo da je štapa sastavljen od $N = 3$ elementa duljina L_i ($i = 1, M$), kao što je prikazano na slici 3.

Glavni je cilj izraziti odnos između sila u čvorovima i njihovih pomaka. Vremenski ovisna promjena duljine elementa jest

$$\Delta_i = q_i(t) - q_{i-1}(t) \quad (18)$$

Energija deformacije (U) štapa jednaka je zbroju energija deformacije svih elemenata. U ovom je slučaju ukupna potencijalna energija u Laplaceovoj domeni

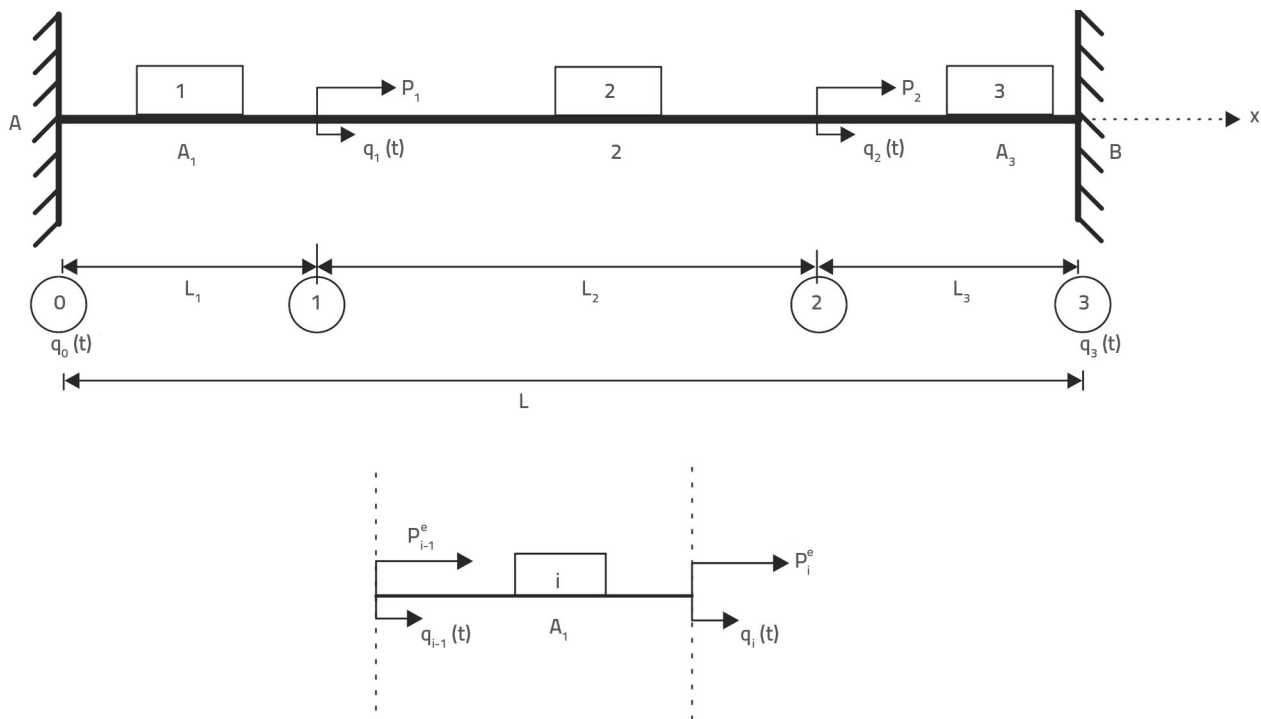
$$\bar{\Pi} = \sum_{i=1}^N \bar{U}_i - \bar{W}_E \quad (19)$$

gdje je \bar{W}_E Laplaceova transformacija vanjskoga virtualnog rada. Uvrštavanje Laplaceove transformacije jednadžbe (17) u izraz za unutarnje energije preoblikovanu u Laplaceovu domeni i integriranje po cijelom volumenu konstrukcije daje ukupnu energiju deformacije $\sum_{i=1}^N \bar{U}_i$ u Laplaceovoj domeni.

Da bi se moglo primijeniti načelo ukupne potencijalne energije, ukupni potencijal ($\bar{\Pi}$) mora se izraziti u ovisnosti o nepoznatim pomacima krajeva (\bar{q}_1 i \bar{q}_2), kao što je prikazano na slici 3.:

$$\bar{\Pi} = \sum_{i=1}^3 \bar{U}_i - \bar{P}_1 \bar{q}_1 - \bar{P}_2 \bar{q}_2 \quad (20)$$

$\bar{\Pi}$ poprima ekstremnu vrijednost za točno polje pomaka. Prema tome, varijacija u izrazu (20) za \bar{q}_1 i \bar{q}_2 daje tražene rezultate u Laplaceovoj domeni.



Slika 3. Shematski prikaz statički neodređenoga viskoelastičnog štapa

Dvije su neovisne veličine podložne varijacijama funkcionala: \bar{q}_1 i \bar{q}_2 . Varijacije u odnosu na te veličine uz uvjet $\delta\bar{\Pi} = 0$ postaju

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{q}_1} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{q}_2} = 0 \tag{21}$$

$$\left(\frac{EA_1}{L_1} + \frac{\eta s A_1}{L_1} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_0 \\ \bar{q}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^1 \\ \bar{Q}_1^2 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{EA_2}{L_2} + \frac{\eta s A_2}{L_2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_2^1 \\ \bar{Q}_2^2 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Izrazi (21) daju sustav dviju linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznicama \bar{q}_1 i \bar{q}_2 . Matrični je zapis tih izraza

$$EA \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{\eta s}{EL_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{\eta s}{EL_2} \right) & \left(-\frac{1}{L_2} - \frac{\eta s}{EL_2} \right) \\ \left(-\frac{1}{L_2} - \frac{\eta s}{EL_2} \right) & \left(\frac{1}{L_2} + \frac{\eta s}{EL_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{\eta s}{EL_3} \right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

$$\left(\frac{EA_3}{L_3} + \frac{\eta s A_3}{L_3} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_3^1 \\ \bar{Q}_3^2 \end{Bmatrix}$$

pri čemu su matrice

matrice krutosti elemenata. Pomoću svojstava pojedinih elementa sastavljena je element po element globalna matrica krutosti, uzraz (24):

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{EA_1}{L_1} + \frac{\eta s A_1}{L_1} \right) & \left(-\frac{EA_1}{L_1} - \frac{\eta s A_1}{L_1} \right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{EA_1}{L_1} - \frac{\eta s A_1}{L_1} \right) & \left(\frac{EA_1}{L_1} + \frac{\eta s A_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} + \frac{\eta s A_2}{L_2} \right) & \left(-\frac{EA_2}{L_2} - \frac{\eta s A_2}{L_2} \right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{EA_2}{L_2} - \frac{\eta s A_2}{L_2} \right) & \left(\frac{EA_2}{L_2} + \frac{\eta s A_2}{L_2} + \frac{EA_3}{L_3} + \frac{\eta s A_3}{L_3} \right) & \left(-\frac{EA_3}{L_3} - \frac{\eta s A_3}{L_3} \right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{EA_3}{L_3} - \frac{\eta s A_3}{L_3} \right) & \left(\frac{EA_3}{L_3} + \frac{\eta s A_3}{L_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_0 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^1 \\ \bar{Q}_1^2 + \bar{Q}_2^1 \\ \bar{Q}_2^2 + \bar{Q}_3^1 \\ \bar{Q}_3^2 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

Da bismo riješili taj problem treba odrediti čvorne sile Q_i^e , a jednačba se može zapisati u obliku

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (25)$$

gdje \mathbf{F} označava vektor čvornih sila za cijelu konstrukciju, matrica \mathbf{K} globalnu matricu krutosti, a \mathbf{u} vektor pomaka čvorova. Rješenja kondenziranih jednačbi su nepoznati pomaci \bar{q}_1 i \bar{q}_2 . Izračunani će se pomaci biti upotrijebiti za dobivanje vrijednosti proširenja $\bar{\Delta}_i$ Laplaceove domene iz Laplaceovih transformacija u jednačbi (18). Inverzna Laplaceova transformacija primjenjuje se za pretvorbu dobivenih rezultata u stvarnu (vremensku) domeni. Uzdužne sile mogu se lako izračunati iz konstitutivnog odnosa materijala kada je to potrebno.

5. Numerički primjeri i rasprava

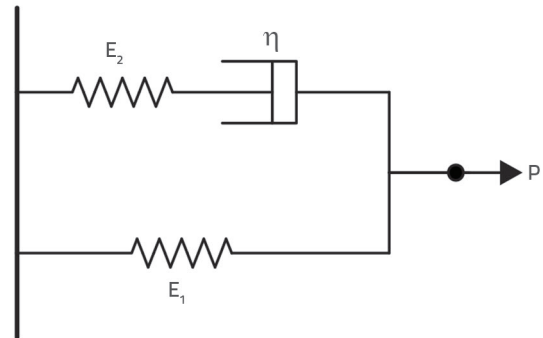
U ovom su poglavlju opisane tri numeričke primjene kako bi se potvrdila točnost i prikazao potencijal predložene metode. Kao prvi primjer usporedbe predložen je standardni linearni model viskoelastičnoga materijala koji se temelji na kombinaciji opruga i prigušivača koji prikazuju viskoelastično ponašanje statički određene štapne konstrukcije. U daljnjim primjerima prikazana su rješenja statički neodređenih viskoelastičnih štapnih konstrukcija svojstva kojih opisuju Kelvin-Voightov model i standardni linearni model za čvrsta tijela. Koraci u rješavanju tih praktičnih primjera su sljedeći:

- Odrediti konstitutivnu relaciju modela viskoelastičnoga materijala u Laplaceovoj domeni.
- Odrediti broj poddomena na koje je tijelo podijeljeno.
- Izraziti unutarnju energiju, izraz (12), u Laplaceovoj domeni.
- Primijeniti načelo ukupne potencijalne energije u Laplaceovoj domeni, izraz (20).
- Izračunati nepoznanice (pomake krajeva) pomoću izraza (24).
- Inverznom Laplaceovom transformacije pretvoriti dobivene rezultate u vremensku domenu.

Koliko znamo, u postojećoj literaturi ne postoje sustavne formulacije koje se temelje na energiji. Budući da analitička rješenja nisu dostupna u literaturi, kako bi se provjerila valjanost predložene formulacije za ukupnu potencijalnu energiju, rezultati su uspoređeni s rezultatima analize metodom konačnih elemenata provedenom pomoću računalnog programa ABAQUS. U analizama je upotrijebljen konstantan Poissonov koeficijent ($\nu = 0,25$).

5.1 Primjer 1: standardni linearni model za čvrsta tijela

U ovom primjeru, preuzetom iz rada [30], analiziran je štap duljine 254 mm i promjera 25,4 mm. Jedan kraj štapa bio je spojen spodlogom, dok je drugi kraj bio izložen trenutnom aksijalnom naprezanju od 0,689 MPa. Standardni linearni model za čvrsta tijela (sliku 4.) sadrži dva paralelno spojena sustava. Maxwellov krak sastavljen je od opruge ($E_2 = 62,01$ MPa) i prigušivača ($\eta = 62,01$ MPa s), a drugi krak sadrži samo oprugu ($E_1 = 6,89$ MPa); taj je model primijenjen za modeliranje viskoelastičnoga štapa.

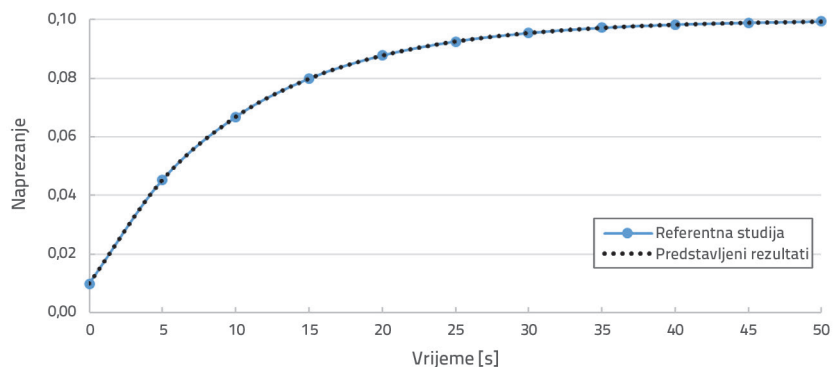


Slika 4. Reološki model viskoelastičnoga štapa

Konstitucijska je relacija standardnoga linearnog modela za čvrsta tijela

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (26)$$

Slika 5. prikazuje krivulje deformacija u smjeru opterećenja u ovisnosti o vremena dobivene pomoću predložene formulacije za ukupnu potencijalnu energiju i standardnoga linearnog modela za čvrsta tijela iz [30]. Predložena rješenja i rješenja iz spomenutoga istraživanja dobro se podudaraju. Uz pomoć ovoga primjera ispitana je računalna učinkovitost i točnost predložene formule temeljene na energiji u primjeni na statistički određene sisteme.

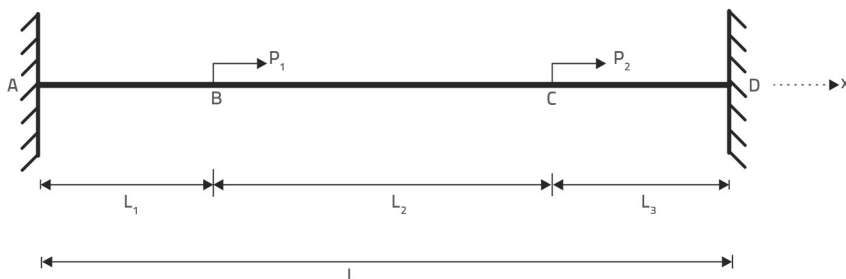


Slika 5. Usporedba rješenja iz rada [30] i rješenja dobivenoga na temelju formule za ukupnu potencijalnu energiju

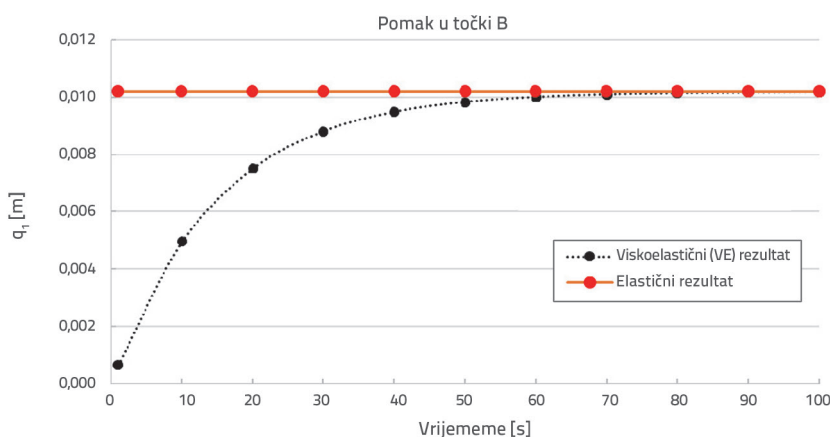
5.2. Primjer 2: statički neodređeni viskoelastični štap svojstava opisanih Kelvin-Voightovim modelom

Ovaj je primjer upotrijebljen za procjenu numeričke točnosti formulacije za ukupnu potencijalnu energiju. Kao primjer je uzet statički neodređeni štap prikazan na slici 6., koji je upet na oba kraja. Viskoelastični je štap poprečnoga presjeka konstantne ploštine $A = 900 \text{ cm}^2$, a izložen je opterećenjima od $P_1 = 200 \text{ N}$ i $P_2 = 400 \text{ N}$. Odredit ćemo o vremenu ovisno ponašanje primjenom Kelvin-Voightoga viskoelastičnog materijala pri

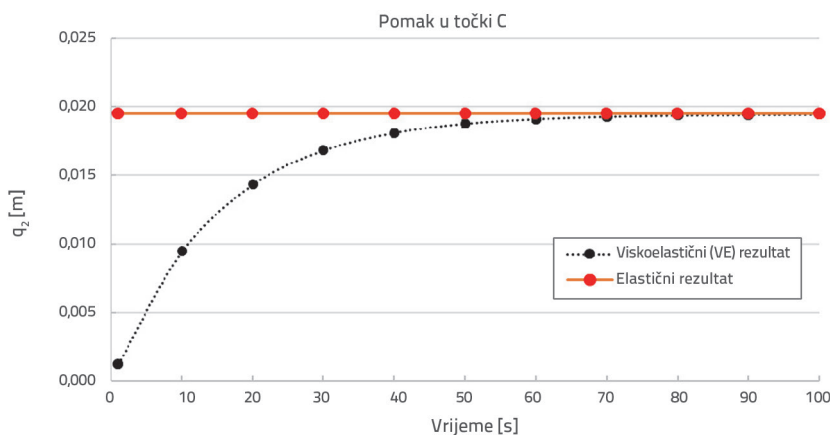
čemu su $E = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$ i $\eta = 6 \times 10^6 \text{ Pas}$. Točnost primjene ukupne potencijalne energije u aksijalno opterećenom viskoelastičnom štapu, duljine $L = L_1 + L_2 + L_3$, koji je sastavljen od $N = 3$ elementa ($L_1 = 1 \text{ m}$, $L_2 = 2 \text{ m}$ i $L_3 = 3 \text{ m}$), potvrđena je pomoću rezultata za aksijalno opterećeni elastični štap. Da bi se dobio pomak aksijalno opterećenoga elastičnog štapa u smjeru opterećenja, koeficijent viskoznosti η u izvedenoj formuli uzet je gotovo jednakim nuli. Rezultati elastičnosti i viskoelastičnosti (slike 7. i 8.) dobro se podudaraju i ponovno je dokazano da je predložena formulacija učinkovita za izračun.



Slika 6. Statički neodređeni viskoelastični štap



Slika 7. Pomak (u točki B) u ovisnosti o vremenu statički neodređenoga elastičnog i viskoelastičnog štapa

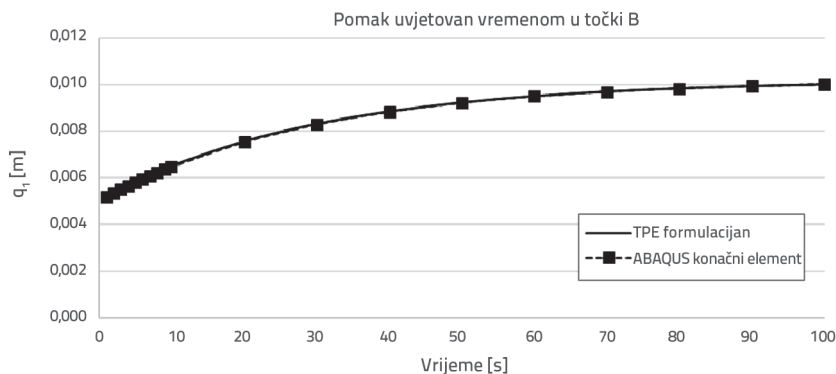


Slika 8. Pomak (u točki C) u ovisnosti o vremenu statički neodređenoga elastičnog i viskoelastičnog štapa

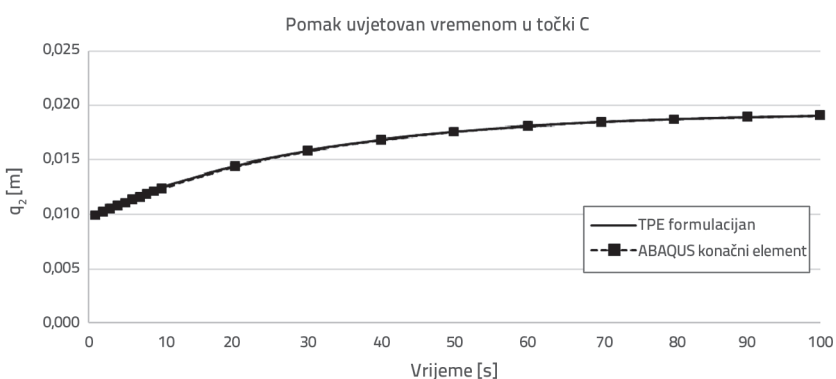
5.3. Primjer 3: statički neodređeni viskoelastični štap svojstava opisanih standardnim linearnim modelom za čvrsta tijela

U ovom primjeru izračunane su o vremenu ovisne vrijednosti pomaka viskoelastičnoga štapa sa slike 6. kojem su svojstva opisana standardnim linearnim modelom za čvrsta tijela. Uzeta su geometrijska svojstva iz prethodnoga primjera. Svojstva su materijala za viskoelastični štap $E_1 = E_2 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}$ i $\eta = 6 \times 10^6 \text{ Pa s}$. Sistem je bio izložen aksijalnim silama veličina $P_1 = 200 \text{ N}$ i $P_2 = 400 \text{ N}$. Rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenima programom ABAQUS za analizu metodom konačnih elemenata. ABAQUS je štap podijelio na 60 konačnih elemenata. Slike 9. i 10. prikazuju o vremenu ovisne pomake u smjeru opterećenja zajedno s rezultatima dobivenima pomoću softvera ABAQUS. Rezultati za ukupnu potencijalnu energiju dobro se slažu s pripadajućim rezultatima dobivenim pomoću ABAQUS-a i točni su do gotovo pet decimalnih mjesta za različite vremenske vrijednosti.

Gustoća mreže središnji je problem u analizi konačnim elementima. Finija mreža obično daje točnije rezultate; međutim, vrijeme računanja također je važno. Čini se da je točnost predložene formulacije utemeljene na energiji neovisna o broju elemenata. Slike 7. i 8. i slike 9. i 10. prikazuju rezultate pomaka u ovisnosti o vremenu za Kelvin-Voightov model i za standardni linearni model za čvrsta tijela. Očekivano, opruga Kelvinovoga modela "želi" se produljiti, ali je usporeva prigušivač koji ne može odmah reagirati. Prema tome, duljina opruge nije se promijenila naglom primjenom opterećenja



Slika 9. Usporedba formulacije za ukupnu potencijalnu energiju i rezultata dobivenih pomoću programa ABAQUS u točki B



Slika 10. Usporedba formulacije za ukupnu potencijalnu energiju i rezultata dobivenih pomoću programa ABAQUS u točki C

na Kelvinov model. U standardnom linearnom modelu za čvrsta tijela postoji trenutna deformacija pri naglom opterećenju. Na temelju ove analize može se zaključiti da predložena formulacija ima dobar potencijal za prikaz vremenski ovisnoga ponašanja viskoelastičnoga medija izloženoga opterećenju. Treba primijetiti da se predložena metoda, teoriju koje je lako razumjeti i lako provesti, pokazala učinkovitom za rješavanje primjenom bilo kojega konstitucijskog modela linearne viskoelastičnosti.

Glavna je prednost predložene metode u tome što se skup jednadžbi koje treba riješiti može prenamijeniti u nekoliko jednostavnih koraka, ovisno o vrsti modela viskoelastičnih materijala i konstrukcijskih elemenata. Analiza sustava s različitim brojem elemenata, modelima viskoelastičnoga materijala i vrstama opterećenja može se provesti izravno u nekoliko jednostavnih koraka.

6. Zaključak

Vrlo je važno razumjeti ulogu ponašanja materijala u građevinskim problemima, koji su matematički modeli fizičkih stanja. Nekoliko novih materijala pokazuje viskoelastična svojstva kojima je teško izraziti opseg. Ovo je istraživanje provedeno kako bi istraživačima omogućilo bolje razumijevanje nove metode rješenja koja se temelji na načelu minimalne potencijalne energije za analizu viskoelastičnih

tijela. Načelo ukupne potencijalne energije obuhvaća određivanje funkcije koja je stacionarna vrijednost zadanoga funkcionala. Jedinstvenost je ovoga istraživanja u tome što su prvi put dobivene funkcije energije za statički neodređene viskoelastične štapne konstrukcije u Laplaceovoj domeni. Kako bi se dobiveni rezultati pretočili u stvarnu domenu, primijenjena je inverzna Laplaceova transformacija. Prikazana su tri numerička primjera kako bi se osigurala točnost i prikazao potencijal predložene metode. Za prikaz o vremenu ovisnoga ponašanja viskoelastičnih materijala primijenjeni su različiti mehanički analogoni.

Predložena formulacija ima dobar potencijal za prikaz o vremenu ovisnoga ponašanja viskoelastičnoga medija izloženoga opterećenju. Treba istaknuti da se predložena metoda, teoriju koje je lako razumjeti i koju je jednostavno provesti u praksi, pokazala učinkovitom za rješavanje primjenom bilo kojega konstitucijskog modela linearne. Glavna je prednost predložene metode u tome što se skup jednadžbi koje treba riješiti može prenamijeniti u nekoliko jednostavnih koraka, ovisno o vrsti modela viskoelastičnih materijala i konstrukcijskih elemenata. U ovom radu prikazana su vrlo točna rješenja za statički određene i neodređene viskoelastične sisteme. Koliko nam je poznato, ovo je prvo istraživanje koje se bavi analizom statički neodređenih štapnih konstrukcija viskoelastičnih svojstava pomoću sustavnog pristupa utemeljenog na načelu energije. Rezultati koji su ovdje predstavljeni su novi. Ovo istraživanje započinje jednostavnim modelom štapa i vodi autoricu i njezine suradnike kroz sve složenije zadatke u mehanici čvrstoga tijela, kao što su primjerice viskoelastični sklopovi dvaju ili više štapova izloženih savijanju te posmičnom i aksijalnom opterećenju, koji se nazivaju okvirima, ili izloženih samo aksijalnim silama, koji se nazivaju ravninskim ili prostornim rešetkama, kao i kroz zadatke koji uključuju deformacije, stabilnost i vibracije viskoelastičnih tijela.

Prilog

Transformacija prve derivacije:

$$L\left\{\frac{d}{dt}f\right\} = s\bar{f}(s) - f(0) \tag{A.1}$$

Transformacija konvolucije:

$$L(f * g) = \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s) \tag{A.2}$$

LITERATURA

- [1] Flügge, W.: *Viscoelasticity*, Second edition, Springer, Berlin, 1975.
- [2] Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K.: *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.
- [3] Christensen, R.M.: *Theory of Viscoelasticity*, Second edition, Academic Press, New York, 1982.
- [4] Chen, T.: The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (1995), pp. 509-522, <https://doi.org/10.1002/nme.1620380310>
- [5] Aköz, A.Y., Kadioğlu, F.: The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 (1999) pp. 1909-1932, [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990430\)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990430)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P)
- [6] Mehl, J.D., Miles, R.N.: Finite element modeling of the transient response of viscoelastic beams, *Proceedings of the SPIE 2445*, (1995), pp. 306-311.
- [7] Filippi, M., Carrera, E.: Stress analyses of viscoelastic three-dimensional beam-like structures with low- and high-order one-dimensional finite elements, *Meccanica*, 56 (2021), pp.1475-1482, <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01191-5>
- [8] Barbosa, F.S., Farage, M.C.R.: A finite element model for sandwich viscoelastic beams: Experimental and numerical assessment, *Journal of Sound and Vibration*, 317 (2008), pp. 91-111, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.013>
- [9] Kpeky, F., Boudaoud, H., Abed-Meraim, F., Daya, E.M.: Modeling of viscoelastic sandwich beams using solid-shell finite elements, *Composite Structures*, 133 (2015), pp. 105-116, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.055>
- [10] Huang, Z., Wang, Xi., Wu, N., Chu, F., Luo, J.: A finite element model for the vibration analysis of sandwich beam with frequency-dependent viscoelastic material core, *Materials*, 12 (2019), 3390, <https://doi.org/10.3390/ma12203390>
- [11] Docevska, M., Arangelovski, T., Markovski, G., Nakov, D.: Numerical and analytical model for serviceability limit states of RC elements, *Građevinar*, 70 (2018), pp. 943-952, <https://doi.org/https://doi.org/10.14256/JCE.2050.2017>
- [12] Manevich, A., Kołakowski, Z.: Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49 (2011), pp. 3-16.
- [13] Freundlich, J.: Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54 (2016), pp. 1433-1445, <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.54.4.1433>
- [14] Failla, G.: On the dynamics of viscoelastic discontinuous beams, *Mechanics Research Communications*, 60 (2014), pp. 52-63, <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2014.06.001>
- [15] Arda, M.: Vibration analysis of an axially loaded viscoelastic nanobeam, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 10 (2018), pp. 252-263, <https://doi.org/10.24107/ijeas.468769>
- [16] Shariati, A., Jung, D.W., Sedighi, H.M., Zur, K.K., Habibi, M., Safa, M.: On the vibrations and stability of moving viscoelastic axially functionally graded nanobeams. *Materials*, 13 (2020), 1707, <https://doi.org/10.3390/ma13071707>
- [17] Tadi Beni, Z., Hosseini Ravandi, S.A., Tadi Beni, Y.: Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of viscoelastic/piezoelectric nano-beam, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7 (2021), pp. 1878-1891, <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.32044.1958>
- [18] Xiaodong, Y., Li-Qun, C.: Non-linear forced vibration of axially moving viscoelastic beams, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 19 (2006), pp. 365-373, <https://doi.org/10.1007/s10338-006-0643-3>
- [19] Ebrahimi-Mamaghani, A., Forooghi, A., Sarparast, H., Alibeigloo, A., Friswell, M.I.: Vibration of viscoelastic axially graded beams with simultaneous axial and spinning motions under an axial load, *Applied Mathematical Modelling*, 90 (2021), pp. 131-150, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.041>
- [20] Liu, S., Tang, Y.Q., Chen, L.: Multi-scale analysis and Galerkin verification for dynamic stability of axially translating viscoelastic Timoshenko beams, *Applied Mathematical Modelling*, 93 (2021), pp. 885-897, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.12.039>
- [21] Mokhtari, A., Mirdamadi, H.R.: Study on vibration and stability of an axially translating viscoelastic Timoshenko beam: non-transforming spectral element analysis, *Applied Mathematical Modelling*, 56 (2018), pp. 342-358, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.12.007>
- [22] Gürgöze, M.: Parametric vibrations of a viscoelastic beam (Maxwell model) under steady axial load and transverse displacement excitation at one end, *Journal of Sound and Vibration*, 115 (1987), pp. 329-338, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(87\)90476-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(87)90476-7)
- [23] Ding, H., Chen, L.: Nonlinear dynamics of axially accelerating viscoelastic beams based on differential quadrature, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 22 (2009), pp. 267-275, [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(09\)60274-3](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(09)60274-3)
- [24] Shirahatti, U.S., Sinha, S.C.: Stability of perfect viscoelastic columns subjected to periodic axial loading. *Proceedings of the ASME 1991 Design Technical Conferences. 13th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise: Vibration Analysis-Analytical and Computational*, Miami, Florida, USA, pp. 225-231, 1991.
- [25] Faraji Oskouie, M., Ansari, R., Sadeghi, F.: Nonlinear vibration analysis of fractional viscoelastic Euler-Bernoulli nanobeams based on the surface stress theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 30 (2017), pp. 416-424, <https://doi.org/10.1016/j.camss.2017.07.003>
- [26] Aköz, A.Y., Kadioğlu, F., Tekin, G.: Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 19 (2015), pp. 483-503, <https://doi.org/10.1007/s11043-015-9274-8>
- [27] Tekin, G., Kadioğlu, F.: Viscoelastic behavior of shear-deformable plates, *International Journal of Applied Mechanics*, 9 (2017), pp. 1750085 (23 pages), <https://doi.org/10.1142/S1758825117500855>
- [28] Gutierrez-Lemini, D.: *Engineering Viscoelasticity*. Springer: New York; 2014.
- [29] Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Third edition, Pergamon Press, New York, 1982.
- [30] Collingwood, G.A., Becker, E.B., Miller, T.: *User's Manual for the TEXVISC Computer Program*, Morton Thiokol, Inc., Document Numbers U-85-4550A and U-85-4550B, 1985.