

Primljen / Received: 15.5.2016.  
Ispravljen / Corrected: 19.1.2017.  
Prihvaćen / Accepted: 14.4.2017.

Dostupno online / Available online: 30.12.2018.

# Utjecaj točkastog opterećenja na membranske konstrukcije

## Autori:



Doc.dr.sc. **Vuk Milošević**, dipl.ing.arh.  
Sveučilište u Nišu, Srbija  
Fakultet građevinarstva i arhitekture  
[vukamer@yahoo.com](mailto:vukamer@yahoo.com)



Prof.dr.sc. **Biserka Marković**, dipl.ing.arh.  
Sveučilište u Nišu, Srbija  
Fakultet građevinarstva i arhitekture  
[bisam@gaf.ni.ac.rs](mailto:bisam@gaf.ni.ac.rs)



Prof.dr.sc. **Dragoslav Stojić**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište u Nišu, Srbija  
Fakultet građevinarstva i arhitekture  
[dragoslav.stojic@gaf.ni.ac.rs](mailto:dragoslav.stojic@gaf.ni.ac.rs)

Prethodno priopćenje

**Vuk Milošević, Biserka Marković, Dragoslav Stojić**

## Utjecaj točkastog opterećenja na membranske konstrukcije

U radu je prikazano istraživanje utjecaja točkastog opterećenja na membranske konstrukcije. Istraživanje je provedeno na numeričkom modelu tipične membranske konstrukcije. Modelom su obuhvaćena razna točkasta opterećenja, a analizirano je nekoliko parametara konstrukcije kako bi se odredilo ponašanje membrane pri djelovanju točkastog opterećenja. Dobiveni rezultati pokazuju da točkasto opterećenje utječe na membranske konstrukcije znatno drugačije nego što je to slučaj kod površinskog opterećenja. Glavni utjecaji točkastog opterećenja na membransku konstrukciju su promjena geometrije konstrukcije te promjena membranskih sila.

### Ključne riječi:

membranske konstrukcije, točkasta opterećenja, lake konstrukcije, promjena geometrije, membranske sile, vlačne konstrukcije

Preliminary note

**Vuk Milošević, Biserka Marković, Dragoslav Stojić**

## Effects of point loads on membrane structures

A research focusing on the effects of point load on membrane structures is presented in the paper. The research was conducted on a numerical model of a typical membrane structure. Different point loads were applied to the model, and several structural parameters were monitored so as to define membrane behaviour under point load. The results show that point loads influence membrane structures in a significantly different way compared to area loads. The main repercussions of point loads on the membrane structure are the change in geometry of the structure and the change of membrane forces.

### Key words:

membrane structures, point loads, lightweight structures, geometry change, membrane forces, tensile structures

Vorherige Mitteilung

**Vuk Milošević, Biserka Marković, Dragoslav Stojić**

## Einfluss der Punktbelastung auf Membrankonstruktionen

In der Abhandlung wird die Untersuchung des Einflusses der Punktbelastung auf Membrankonstruktionen aufgezeigt. Die Untersuchung wurde an einem numerischen Modell einer typischen Membrankonstruktion durchgeführt. Unterschiedliche Punktbelastungen wurden mit dem Modell einbezogen und mehrere Konstruktionsparameter wurden analysiert, um das Verhalten der Membran bei Wirkung der Punktbelastung zu bestimmen. Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass sich die Punktbelastung im Wesentlichen anders auf die Membrankonstruktion auswirkt, als es der Fall bei der Oberflächenbelastung ist. Die Hauptwirkungen der Punktbelastung auf die Membrankonstruktion sind die Änderung der Geometrie der Konstruktion sowie die Änderung der Membrankräfte.

### Schlüsselwörter:

Membrankonstruktion, Punktbelastung, leichte Konstruktionen, Änderung der Geometrie, Membrankräfte, Zugkonstruktion

## 1. Uvod

Membranske konstrukcije su vlačne konstrukcije koje se koriste diljem svijeta još od sredine dvadesetog stoljeća. U estetskom smislu, njihovo najatraktivnije obilježje je dvostruko zakrivljeni oblik. Kako bi bile dovoljno stabilne, te konstrukcije zapravo i trebaju biti dvostruko zakrivljene, pri čemu se primjenjuje načelo negativne Gaussove zakrivljenosti. Uz to, trebaju biti i neprekidno zategnute. Membrane se odlikuju iznimno malom masom od približno  $1 \text{ kg/m}^2$ , a tome je razlog vrlo mala debljina membrane koja je približno  $1 \text{ mm}$ . Ipak, bez obzira na njihovu lakoću i malu debljinu, raspon membranskih konstrukcija može dosezati i nekoliko desetaka metara. Istovremeno, one su potpuno montažne pa postavljanje ne traje dugo. Međutim, zbog tako male debljine, membrane imaju loša termička svojstva. Stoga se najčešće koriste za prekrivanje otvorenih prostora. Primjena membranskih konstrukcija za zatvaranje nekog prostora može dovesti do niske energetske učinkovitosti, osim u slučajevima kada se koriste dvostruki slojevi membrane.

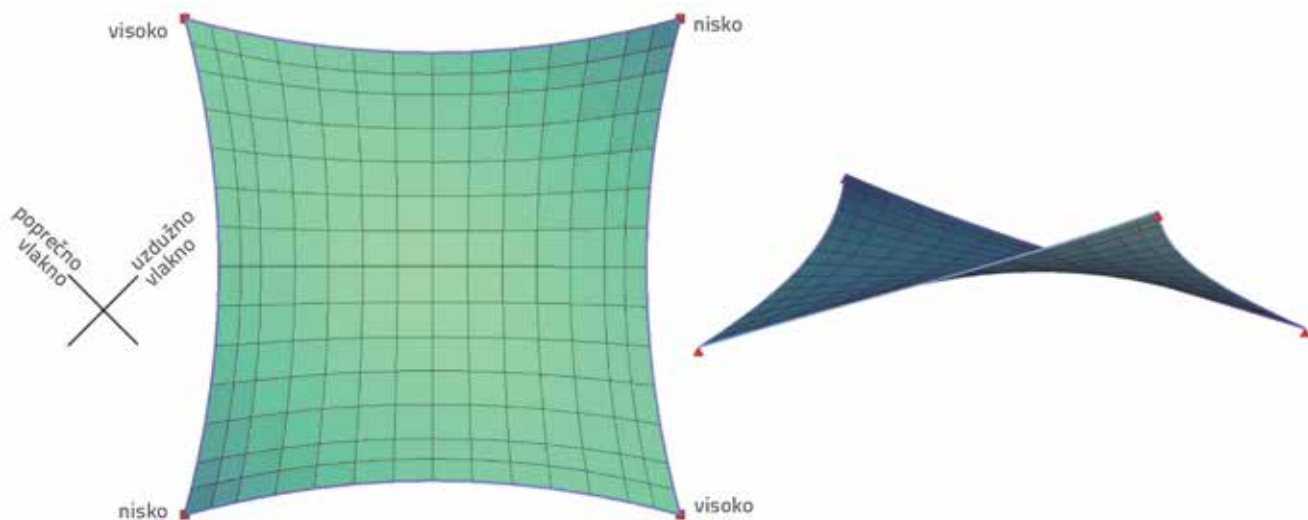
Posljednjih su godina membranske konstrukcije tema mnogih znanstvenoistraživačkih projekata. U vezi s tim konstrukcijama razlikujemo nekoliko područja istraživanja. Tema je najčešće oblik membrane, jer se one po tome bitno razlikuju od ostalih konstrukcija. Osnovna tema u vezi s oblikom je takozvano nalaženje oblika [1], a to je postupak određivanja oblika konstrukcije na temelju zadanih parametara. Isti postupak također se provodi u vezi s konstrukcijom mreže prednapetih kabela [2]. Dodatni geometrijski problem je i projiciranje plohe membrane na materijal membrane [3]. Taj je postupak nužan kako bi se od ravnih dijelova materijala dobila dvostruko zakrivljena površina. Danas se membranske konstrukcije izvode od raznih materijala [4]. Značajno područje istraživanja su i svojstva membranskih materijala [5]. Iako su do sada o membranskim konstrukcijama objavljene brojne studije, samo se u nekima od njih istražuje utjecaj točkastog opterećenja. Milošević [6] istražuje ovisnost progiba membrane o položaju

i intenzitetu točkastog opterećenja. Selvadurai [7] istražuje odnos između točkastog opterećenja i progiba na primjeru male gumene membrane. Također se istražuje i utjecaj intenziteta prednapinjanja na pomak membranske konstrukcije pod utjecajem točkastog opterećenja [8]. Osim toga, razmatra se i utjecaj oblika membranske konstrukcije na pomak u slučaju točkastog opterećenja [9]. Međutim, prema spoznajama autora, do sada još nisu potpuno istraženi svi utjecaji točkastog opterećenja na membranske konstrukcije.

U ovom se radu istražuje utjecaj točkastog opterećenja na membranske konstrukcije u svrhu stjecanja novih spoznaja o učincima takvog opterećenja. Do sada se točkasto opterećenje nije sustavno koristilo u analizi membranskih konstrukcija. Američki normativni dokument [10] i europski Priručnik za projektiranje vlačnih konstrukcija [11] ne bave se detaljno pitanjem točkastog opterećenja membranskih konstrukcija. Zbog toga dolazi do nesigurnosti tijekom projektiranja konstrukcija. Inženjeri u svojim proračunima definiraju točkasto opterećenje na bazi prethodnog iskustva, ili jednostavno zanemaruju utjecaj tog opterećenja. To može imati ozbiljne posljedice za samu konstrukciju, pa čak može dovesti i do njenog rušenja. Zbog posebnih obilježja membrana, one se u slučaju točkastog opterećenja ponašaju drugačije od tradicionalnih konstrukcija. Istraživanje prikazano u ovom radu trebalo bi poslužiti kao korak prema uvođenju točkastog opterećenja u norme koje se odnose na membranske konstrukcije.

## 2. Metodologija

Istraživanje prikazano u ovom radu provedeno je na numeričkom modelu tipične membranske konstrukcije. Modelirana konstrukcija je sedlastog tipa, a u tlocrtu je to kvadrat stranice  $10 \text{ m}$ , dok razlika u visini između donjih i gornjih ležajeva iznosi  $3 \text{ m}$ . Vlakna osnove i potke paralelna su s dijagonalama konstrukcije, a vlakna osnove vode od jednog donjeg ležaja do drugog. Debljina membrane iznosi  $1 \text{ mm}$ . Modul elastičnosti membranskog



Slika 1. Tlocrtni i perspektivni prikaz numeričkog modela

materijala iznosi  $500 \text{ N/mm}^2$  u smjeru vlakna osnove, tj.  $375 \text{ N/mm}^2$  u smjeru vlakna potke. Posmični modul iznosi  $5 \text{ N/mm}^2$  a Poissonov koeficijent je 0,2. Ležajevi su fiksni i povezani s kabelima promjera 19 mm na rubovima membrane. Tijekom nalaženja oblika kabeli su bili prednapeti silom od 20 kN, a membrana silom od 1 kN/m u oba glavna smjera pružanja vlakna. Postupak nalaženja oblika i analize numeričkih modela proveden je pomoću programa Sofistik 2012 [12]. Numerički model konstrukcije podijeljen je na 196 konačnih elemenata. Tlocrtni i perspektivni izgled numeričkog modela prikazan je na slici 1.

U usporedbi s površinskim opterećenjem, točkasto opterećenje rjeđe djeluje na membranske konstrukcije. Točkasta opterećenja se obično javljaju prilikom održavanja, tj. pregleda membrane. Tipična površinska opterećenja su opterećenje snijegom i opterećenje vjetrom. Djelovanja površinskih opterećenja uzimaju se u obzir u analizi konstrukcija na temelju normativnih dokumenata. Na temelju iskustava o djelovanju površinskih opterećenja membranske konstrukcije, odabrano je nekoliko parametara u svrhu praćenja ponašanja membranskih konstrukcije pod utjecajem točkastog opterećenja. U ovom se radu to ponašanje prikazuje pomoću sljedećih parametara: promjena geometrije membrane, promjena sile u membrani u dva glavna smjera, promjena sile u rubnim kabelima te promjena reakcija na ležajevima. Ponašanje konstrukcije pod točkastim opterećenjem praćeno je i uspoređivano sa stanjem bez opterećenja. Zaključci o djelovanju točkastog opterećenja na membranske konstrukcije izvedeni su na temelju dobivenih rezultata. Postupak numeričkog modeliranja tako je definiran da je na svaki pojedini unutarnji čvor posebno nanoseno točkasto opterećenje. Intenzitet točkastog opterećenja kontinuirano je iznosio 1 kN u smjeru gravitacije. Rezultati praćenih parametara zabilježeni su nakon svakog opterećenja. Ista konstrukcija neovisno je opterećena nanošenjem površinskog opterećenja od  $0,6 \text{ kN/m}^2$  u smjeru gravitacije. Područje nanošenja površinskog opterećenja je mijenjano kako bi se na taj način simuliralo opterećenje snijegom kada djeluje na čitavu konstrukciju, dok su manja područja korištena za usporedbu s točkastim opterećenjima. Na taj je način prikupljeno više od 28000 rezultata koji opisuju promjenu geometrije membrane, više od 56000 rezultata koji opisuju promjene sila u membrani, oko 9000 rezultata koji opisuju promjene sile na rubnim kabelima, te 676 rezultata koji pokazuju promjene reakcija.

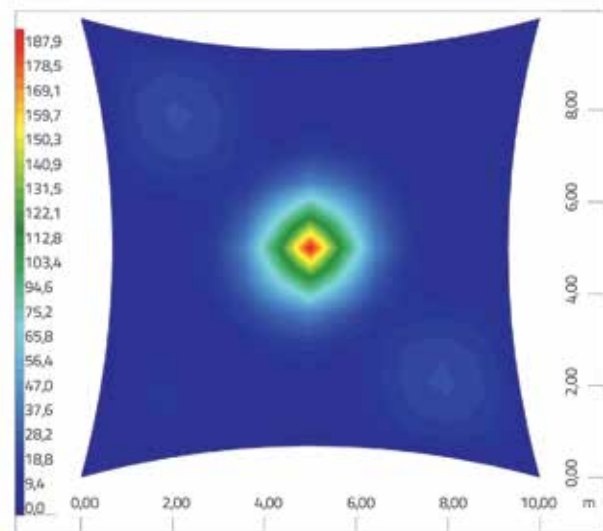
### 3. Rezultati i rasprava

Rezultati parametarske analize prikazani su i razmatrani zasebno za svaki modelirani parametar. Utjecaji točkastog opterećenja na analizirane parametre uspoređeni su s djelovanjem površinskog opterećenja, te je procijenjena važnost točkastog opterećenja.

#### 3.1. Promjena geometrije

Vanjska opterećenja membranskih konstrukcija dovode do njihovog progiba. Takvi se progibi mogu opisati kao promjena

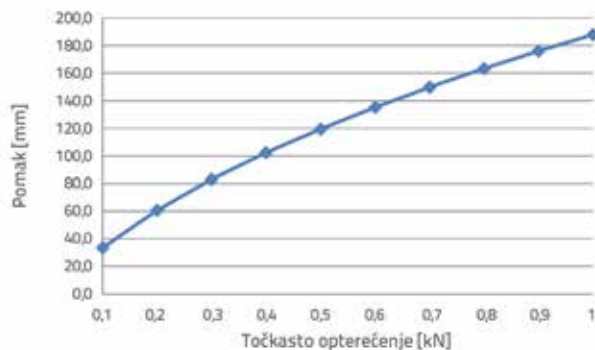
geometrije membranske konstrukcije. Promjene geometrije su privremenog karaktera, tj. one traju isto toliko koliko i opterećenje. Općenito uzevši, te promjene u geometriji mnogo su veće kod membranskih konstrukcija nego kod tradicionalnih građevnih materijala čija je tlačna čvrstoća i čvrstoća savijanja mnogo veća od odgovarajućih vrijednosti materijala membrana. Rješenja problema velikog progiba membrana formulirana su matematičkim putem, kao što je to prikazano u [13]. Na slici 2. vidimo promjenu geometrije analizirane membranske konstrukcije pod utjecajem točkastog opterećenja od 1 kN koje djeluje u sredini membrane.



Slika 2. Promjena geometrije membrane pod utjecajem točkastog opterećenja od 1 kN na sredini konstrukcije (mm)

Kao što možemo vidjeti na slici 2., najveći broj velikih pomaka koncentriran je oko točke u kojoj je nanoseno opterećenje. Rezultati istraživanja upućuju na isto ponašanje svakog mjesta na koje je nanoseno točkasto opterećenje. To potvrđuje zaključke izvedene u prijašnjim studijama [6] u kojima se navodi da točkasta opterećenja dovode do pojave lokalizirane promjene u geometriji membranskih konstrukcija. Međutim, u ovom je istraživanju intenzitet maksimalne promjene geometrije mnogo značajniji od položaja. Na slici 2. vidimo pomak od 187,9 mm kada je točkasto opterećenje nanoseno u sredini membrane, a najveći pomak zabilježen u ovom istraživanju iznosi 190,5 mm. Ponašanje membrane pod utjecajem točkastog opterećenja prilično je složeno, a njegova analiza provodi se u okviru opsežnijeg istraživanja. Deformacije i ostala mehanička svojstva materijala membrane ovisni su o prijašnjim opterećenjima. Prema analiziranom točkastom opterećenju, deformacija na mjestu točkastog opterećenja iznosi 8 %. Dakle, materijal je prošao fazu nabiranja a deformacije su u elastičnoj zoni. Na slici 3. prikazana je ovisnost maksimalnog pomaka o intenzitetu točkastog opterećenja nanesenog u sredini membrane. Može se uočiti da je odnos između intenziteta opterećenja i pomaka nelinearan. Na slici 4. vidimo koliki bi bio maksimalni pomak

membrane u globalnom smjeru Z pod utjecajem točkastog opterećenja od 1 kN u istoj točki.

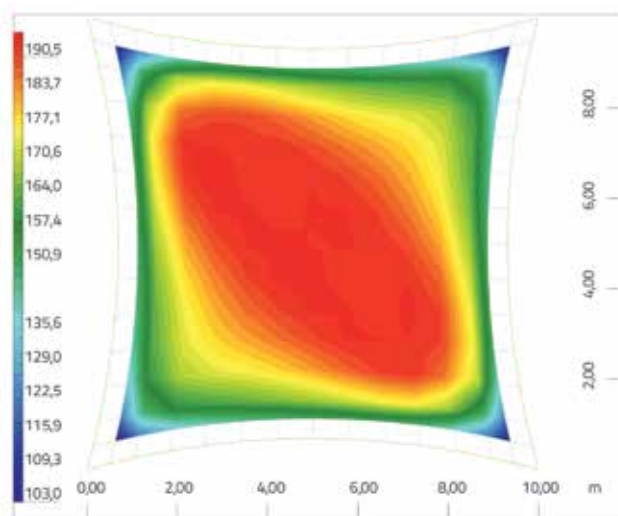


Slika 3. Maksimalni pomak za različite intenzitete točkastog opterećenja u sredini membrane (mm)

Analiziranu konstrukciju raspona 10 m karakterizira maksimalni pomak od gotovo 20 cm pri točkastom opterećenju od samo 1 kN. Takvo ponašanje ne bi se moglo očekivati kod tradicionalnih konstrukcija izvedenih od betona, čelika ili drva, ili bi se u slučaju takvih rezultata moglo zaključiti da konstrukcija ima značajne nedostatke. Maksimalni pomaci takvih konstrukcija u bilo kojoj kombinaciji opterećenja ne iznose više od otprilike  $L/350$ , ovisno o normi koja se primjenjuje, pri čemu  $L$  označava raspon konstrukcije. Međutim, kod membranske konstrukcije pomak od  $L/50$  bilježi se već pri jednostavnom točkastom opterećenju od 1 kN. To praktički znači da norme koje vrijede za druge konstrukcije nisu primjenjive za membranske konstrukcije kada se radi o maksimalnom pomaku, te da se za membranske konstrukcije trebaju primjenjivati posebna pravila. Nepisano pravilo kojim se rukovode projektanti membranskih konstrukcija glasi da maksimalni pomaci ne smiju biti veći od  $L/10$  pod bilo kojim opterećenjem. Veći pomaci mogu dovesti do stvaranja neugode korisnika u prostoru koji je prekriven membranom. Čak i bitno manji pomaci mogu uzrokovati udubljenja [14] koja su već dovela do popuštanja nekih laganih konstrukcija. Istovremeno postoji i opasnost od fizičkog kontakta između membrane i drugih površina, a to može dovesti do oštećenja membrane pa čak i rušenja čitave konstrukcije. Nažalost, još uvijek normama nisu ograničeni maksimalni pomaci membranskih konstrukcija pod utjecajem vanjskih opterećenja.

Površinsko opterećenje od  $0,6 \text{ kN/m}^2$  koje djeluje na čitavu konstrukciju analiziranu u ovom istraživanju dovodi do maksimalnog progiba od približno 370 mm. Rezultanta površinskog opterećenja iznosi više od 50 kN koje je jednoliko raspoređeno po površini konstrukcije. Ako se to površinsko opterećenje usporedi s točkastim opterećenjem od 1 kN, možemo uočiti da kod površinskog opterećenja bilježimo više od 50 puta veću vrijednost opterećenja, a da maksimalni progib nije niti dva puta veći. Može se stoga zaključiti da koncentrirano opterećenje uzrokuje veće progibe membrana u usporedbi s opterećenjem koje je raspoređeno po površini. To se objašnjava svojstvima materijala membrane i malom vrijednošću tlačne

krutosti membrane, te stoga nema momenata savijanja kao odgovora na vanjsko opterećenje. Umjesto toga, u membrani se događaju velike promjene u geometriji te posljedično uspostava ravnoteže unutarnjih i vanjskih sila. Međutim, površinsko opterećenje samo po sebi uključuje veće vrijednosti opterećenja u usporedbi s uobičajenim točkastim opterećenjem, pa tako u konačnici površinsko opterećenje dovodi do većih promjena u geometriji konstrukcije. Konačno možemo zaključiti da vrlo niske vrijednosti točkastog opterećenja mogu uzrokovati progibe koji su usporedivi s mnogo većim površinskim opterećenjima. To pokazuje važnost točkastih opterećenja u odnosu na promjene u geometriji. Promjene u geometriji membranskih konstrukcija pod utjecajem točkastog opterećenja svakako su velike, i kao takve predstavljaju značajnu posljedicu točkastog opterećenja. To upozorava na potrebu da se u provjeri maksimalnih pomaka u obzir uzmu točkasta opterećenja jer dovode do pojave udubljenja i kontakta s ostalim elementima. Ako se u budućnosti donese odluka o izradi norme o maksimalnim pomacima membranskih konstrukcija, točkasta bi opterećenja trebala svakako naći svoje mjesto u takvom dokumentu.



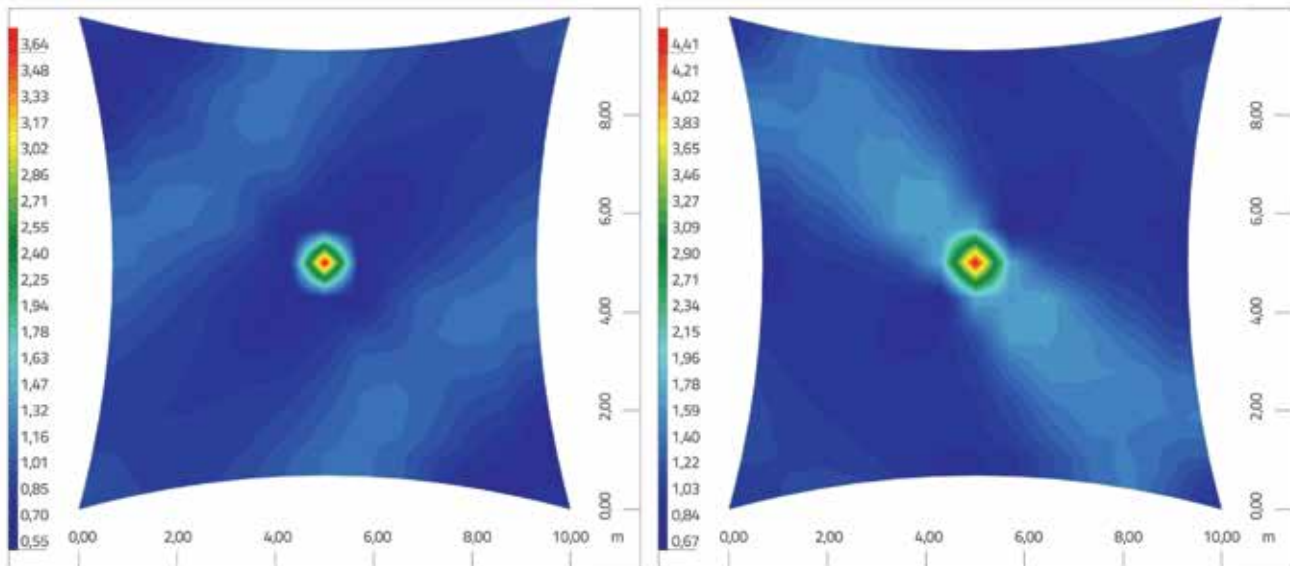
Slika 4. Osjetljivost membrane na točkasto opterećenje od 1 kN, maksimalni pomak u globalnom smjeru Z (mm)

### 3.2. Promjena sile

U ovom su istraživanju praćena tri značajna parametra koji se odnose na silu: membranske sile, sile u kabelima i reakcija oslonaca. Ti su parametri od ključnog značenja za odabir odgovarajuće vrste materijala membrane te za dimenzioniranje rubnih kabela i poduporne konstrukcije.

#### 3.2.1. Membranske sile

U membranskim konstrukcijama membranske su sile zbog ortotropnih svojstava materijala zastupljene kao sile u vlaknima osnove i potke. One se u membranu uvode prednapinjanjem u fazi izvođenja konstrukcije. Kako bi membranska konstrukcija

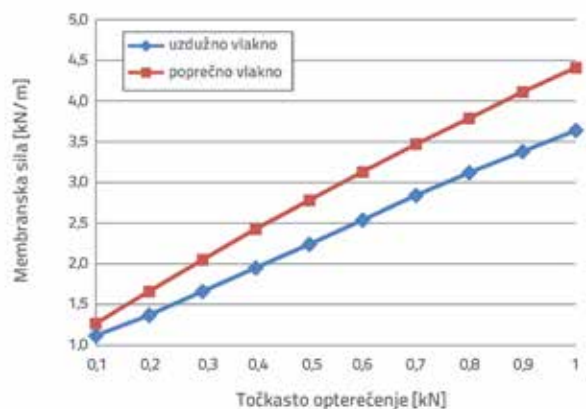


Slika 5. Membranske sile u smjeru osnove (lijevo) i (desno) u smjeru potke kod točkastog opterećenja od 1 kN u sredinu membrane (kN/m)

bila stabilna, ona stalno treba biti u vlaknu. Intenzitet vlačnih sila koje dovode do prednapinjanja definira se tijekom nalaženja oblika. Preporuke o intenzitetu prednapinjanja iskazane su u Europskom priručniku za projektiranje vlačnih konstrukcija [11]. U njemu se daju i preporuke o maksimalnim dopuštenim silama za slučaj vanjskog opterećenja, ovisno o svojstvima materijala. Djelovanje vanjskih opterećenja može dovesti do povećanja ili smanjenja membranskih sila. Površinska opterećenja obično djeluju tako da povećavaju membranske sile u jednom smjeru te smanjuju membranske sile u drugom. Ovo istraživanje pokazalo je da točkasta opterećenja drugačije djeluju na membranske sile. Utjecaj točkastog opterećenja od 1 kN na membranske sile u sredini membrane prikazan je na slici 5.

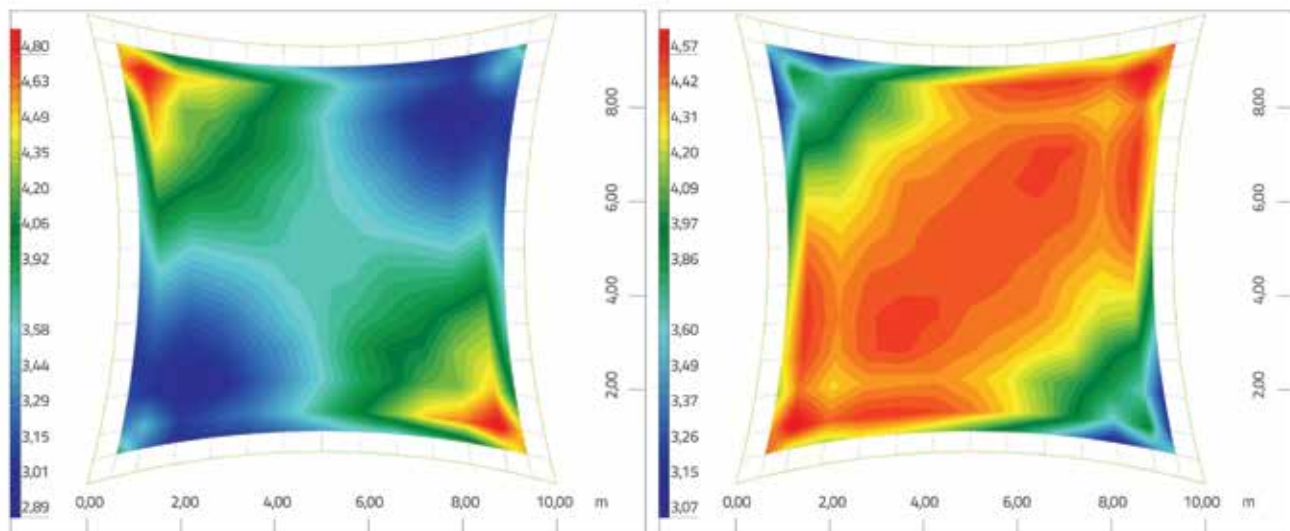
Intenzitet membranskih sila analizirane konstrukcije iznosio je 1 kN/m u rasterećenom stanju i to u smjeru vlakna osnove i vlakna potke. Ponašanje membranskih sila za slučaj točkastog opterećenja slično je ponašanju progiba membrane pod točkastim opterećenjem. Osim toga, promjene membranskih sila izrazito su koncentrirane oko položaja točkastog opterećenja. Iako se utjecaj osjeća na čitavoj membrani, na većem se dijelu membrane osjeća tek mala promjena membranskih sila. Isti obrazac ponašanja može se uočiti na svakom analiziranom položaju točkastog opterećenja. Točkasto opterećenje uzrokuje povećanje i smanjenje membranskih sila u oba smjera. Povećanje membranskih sila smatra se značajnim jer se maksimalne membranske sile provjeravaju u statičkom proračunu konstrukcije. Međutim, značajno je i smanjenje membranskih sila jer može uzrokovati treperenje. Slika 6. prikazuje ovisnost maksimalnih membranskih sila u glavnim smjerovima pružanja vlakana o intenzitetu točkastog opterećenja u sredini membrane. Za razliku od ponašanja pri površinskom opterećenju, maksimalne sile u smjeru vlakna osnove i vlakna potke rastu s porastom intenziteta točkastog opterećenja, kao što se to vidi na slici 6. Veće povećanje

maksimalnih sila u smjeru vlakna potke, a u odnosu na smjer vlakna osnove, objašnjava se usmjerenjem vlakana jer vlakno potke ide od jednog visokog ležaja do drugog, dok je točkasto opterećenje usmjereno prema dolje. Maksimalne membranske sile za točkasto opterećenje u svakoj točki membrane prikazane su na slici 7. Na toj slici vidimo da maksimalne sile pri točkastom opterećenju od 1 kN iznose 4,80 kN/m u smjeru vlakna osnove, tj. 4,57 kN/m u smjeru vlakna potke. Te se dvije vrijednosti ne javljaju pri istom točkastom opterećenju. Različiti položaji točkastog opterećenja dovode do različitih intenziteta membranskih sila.



Slika 6. Maksimalne membranske sile u osnovnim smjerovima pružanja vlakana za različite intenzitete točkastog opterećenja u sredini membrane (kN)

Površinsko opterećenje od 0,6 kN/m<sup>2</sup>, nanoseno na čitavu konstrukciju koja se analizira u okviru ovog istraživanja, mijenja intenzitet membranskih sila, pa tako maksimum u smjeru vlakna osnove postaje 1,99 kN/m, a maksimum u smjeru vlakna potke postaje 7,87 kN/m. U smjeru vlakna potke očekuju se više vlačne



Slika 7. Osjetljivost maksimalnih membranskih sila u osnovnim smjerovima pružanja vlakana za različite intenzitete točkastog opterećenja u sredini membrane (kN/m)

sile nego u smjeru vlakna osnove jer je opterećenje usmjereno tako da izdužuje vlakna potke. Da je opterećenje usmjereno vertikalno prema gore, sile koje djeluju u smjeru vlakna osnove bile bi veće od sila u smjeru vlakna potke. Ukupno površinsko opterećenje iznosi više od 50 kN, a točkasto opterećenje iznosi samo 1 kN. Međutim, rezultirajuća promjena membranskih sila je oko dva puta veća kod površinskog opterećenja. Ako ga usporedimo s površinskim opterećenjem, točkasto opterećenje uzrokuje manje promjene vrijednosti maksimalnih sila u jednom smjeru, te veće promjene u drugom smjeru pružanja vlakana. Isto tako je očito da točkasto opterećenje značajno utječe na promjenu membranskih sila.

### 3.2.2. Sile u kabelima

Rubni kabeli imaju značajnu ulogu u prednapinjanju membrane. Tijekom izvođenja konstrukcije, membrana se ne prednapinje izravno već preko rubnih kabela. To se postiže prednaprežanjem kabela, te se tako postiže potrebna prednapetost membrane. Drugi način prednapinjanja membrane sastoji se u pomicanju

oslonaca čime se također unosi vlak u membranu posredstvom rubnih kabela. Na taj se način u kabelima postiže željena sila prednapona. Intenzitet prednapinjanja kabela definiran je u koraku nalaženja oblika. U fazi nalaženja oblika, zakrivljenost kabela izravno ovisi o intenzitetu sile prednapinjanja kabela i membrane. Optimalan oblik kabela istražuje se u kontekstu konstrukcijskih i estetskih svojstava [15]. Sila u kabelu podložna je promjeni kada vanjska opterećenja djeluju na membranu. Vrsta i promjer kabela za buduću konstrukciju određuju se na bazi sila u kabelima najnepovoljnijega slučaja opterećenja u statičkom proračunu. Tablica 1. prikazuje najveće sile u kabelima kada je analizirana konstrukcija podvrgnuta točkastom opterećenju u označenim točkama.

Položaji točkastog opterećenja odabiru se tako da predstavljaju tipično ponašanje membrane, pri čemu se vodi računa o tome da je analizirana konstrukcija dvostruko simetrična u odnosu na svoje dijagonale. Ležajevi B i D su donji. Sila u kabelu u rasterećenom stanju iznosi 20 kN. Kao što se vidi iz rezultata, točkasti način opterećivanja također djeluje na promjenu intenziteta sile u rubnim kabelima. Povećanje intenziteta sile nije

Tablica 1. Maksimalne sile u kabelima pri točkastom opterećenju

Položaj točkastog opterećenja	Maksimalna sila u kabelu [kN]	Promjena sile u kabelu		
		[%]	[kN]	
	1	21,6	8,00	1,6
	2	24,5	22,50	4,5
	3	24,3	21,50	4,3
	4	22,7	13,50	2,7
	5	23,1	15,50	3,1
	6	24,2	21,00	4,2
	7	21,7	8,50	1,7

veliko, pa tako maksimalno povećanje iznosi 4,5 kN, tj. 22,5 % od prvobitnog intenziteta sile. To možda izgleda kao bitna promjena s gledišta postotka, ali u usporedbi s uobičajenim površinskim opterećenjima taj je utjecaj zapravo od manje važnosti. Za ilustraciju možemo navesti da površinsko opterećenje od 0,6 kN/m<sup>2</sup> koje je nanoseno na čitavu konstrukciju dovodi do povećanja sile u kabelu u rasponu od otprilike 70 kN, što je promjena za više od 250 %. Kabeli se obično dimenzioniraju prema slučajevima opterećenja koji uključuju površinska opterećenja. Svi čvorovi analizirane konstrukcije provjeravaju se na utjecaj točkastog opterećenja na kabele, a svi oni vrlo malo utječu na povećanje sila u kabelima. Točkasto opterećenje trebalo bi biti neočekivano visoko da bi promjena sile u kabelu bila veća nego kod površinskog opterećenja. Stoga se može zaključiti da točkasto opterećenje ne utječe bitno na promjenu sila u kabelima te da ne utječe bitno na dimenzije kabela, naročito u usporedbi s tipičnim vrijednostima površinskog opterećenja. Točkasto opterećenje dovodi do lokalnih promjena u geometriji membrane i u silama membrane i to zbog fleksibilnosti membrane. Međutim, promjene sile u kabelima smatraju se zanemarivima jer su oni aksijalno krući i prednapeti.

### 3.2.3. Reakcije ležajeva

Membranske konstrukcije imaju barem četiri neravninska točkasta ležaja, a složenije konstrukcije i mnogo više. Linijski se ležajevi ponekad koriste kao druga opcija za podupiranje membranskih konstrukcija, ali oni dovode do velike širine vlastitih poprečnih presjeka što nije u skladu sa zahtjevima male težine vlačnih konstrukcija. Sva se opterećenja prenose s membrane na točkaste ležajeve putem rubnih kabela. To se odnosi na vanjska opterećenja, ali također na prednapinjanje i na vlastitu težinu. Što su niže vrijednosti sile na ležaju, lakša je i potporna konstrukcija, a ta potporna konstrukcija od ključnog je značaja za učinkovitost, cijenu i eleganciju lakih konstrukcija [16]. Točkasto opterećenje obično se odlikuje niskim ukupnim opterećenjem, pa stoga ne bi trebalo bitno utjecati na sile na ležajevima. Odabrani rezultati istraživanja koji se odnose na sile na ležajevima prikazani su u tablici 2.

Intenzitet reakcija na ležaju iznosi 35,8 kN za sva četiri ležaja kada nema vanjskog opterećenja. Kada na konstrukciju djeluje točkasto opterećenje, mijenja se reakcija, a također i smjer reakcije. Maksimalne reakcije prikazane su u tablici 2. za sedam različitih položaja točkastog opterećenja. Kao što rezultati pokazuju, nema bitnih promjena u intenzitetu sile na ležaju. Najveća promjena iznosi 4,3 kN, što je otprilike 12 % od prvobitnog intenziteta sile na ležaju. To povećanje ne utječe bitno na potporna konstrukciju. Promjena smjera reakcija vrlo je mala u svim položajima točkastog opterećenja koji se nalaze duž dijagonala konstrukcije. Nešto više promjene smjera uočavaju se na položajima 3 i 6, a i tu se radi o niskim vrijednostima. Taj rezultat je očekivan ako uzmemo u obzir analizirane rezultate promjene sila u kabelima. Kako silu na ležaju uzrokuju sile u kabelima koje djeluju na pojedinom ležaju, te kako povećanje sila u kabelima nije značajno, očekivana promjena sile na ležaju također nije velika. Rezultirajuća sila na ležaju uzrokovana površinskim opterećenjem odlikuje se mnogo većim intenzitetom od sile koju uzrokuju točkasto opterećenje. Površinsko opterećenje od 0,6 kN/m<sup>2</sup> koje je nanoseno na čitavu konstrukciju dovodi do sila na ležaju većih od 120 kN, što je povećanje za približno 250 %. Zanimljivo je napomenuti da točkasto opterećenje od 1 kN može uzrokovati povećanje sile na ležaju veće od 4 kN.

### 3.3. Utjecaj točkastog opterećenja u odnosu na površinsko opterećenje

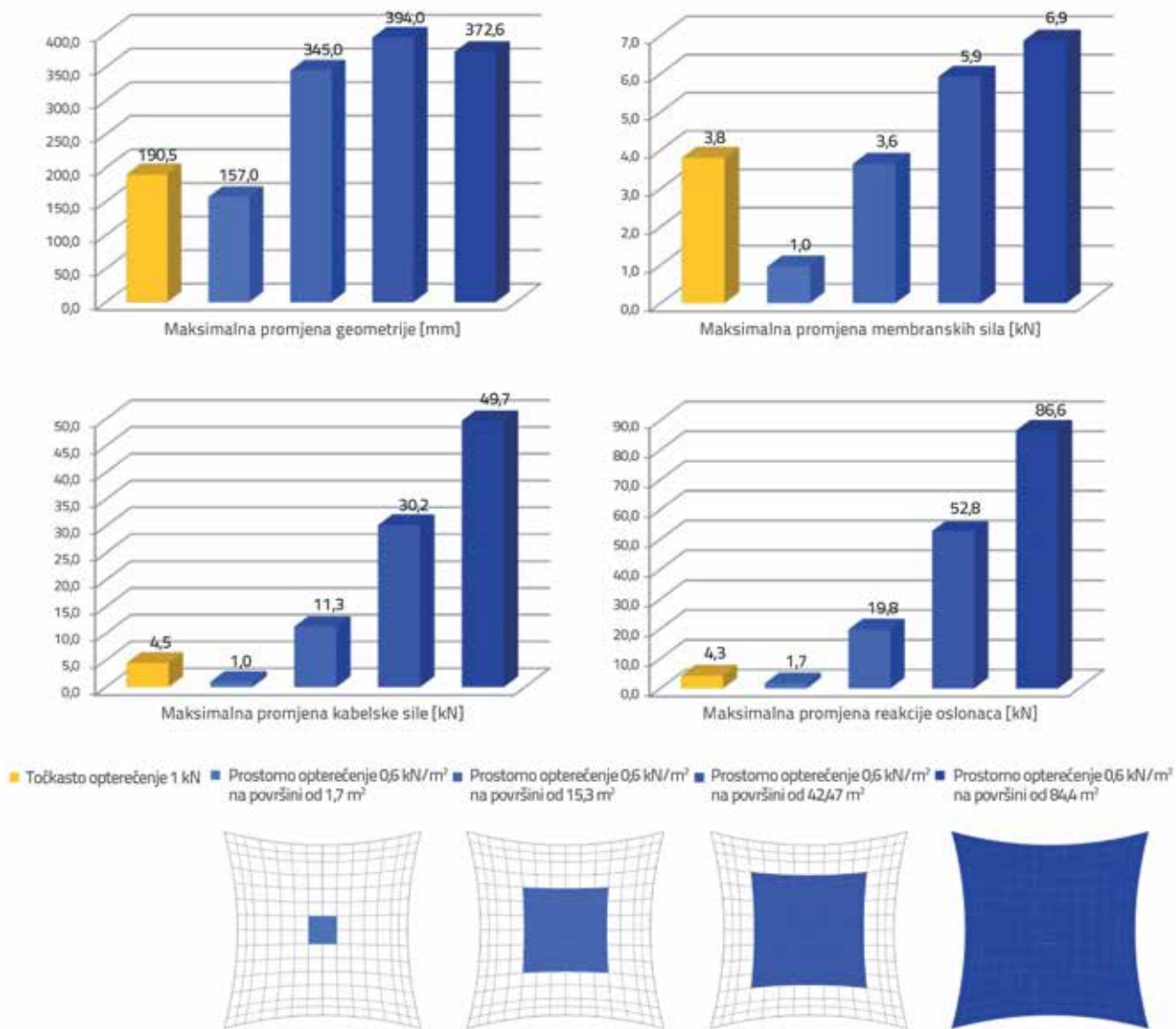
Maksimalni utjecaj točkastog opterećenja od 1 kN uspoređuje se s površinskim opterećenjem od 0,6 kN/m<sup>2</sup>. Promijenjeno je područje nanošenja površinskog opterećenja, pa je tako područje nanošenja bilo: 1,7; 15,3; 42,4 i 84,4 m<sup>2</sup>. Rezultirajuće sile su redom 1,0; 9,2; 25,4 i 50,6 kN, a sve su smještene u sredini konstrukcije. Rezultati dobiveni uspoređivanjem točkastih opterećenja i površinskog opterećenja sažeto su prikazani na slici 8. U donjem dijelu slike 8. prikazano je područje nanošenja analiziranih površinskih opterećenja. Kao što vidimo na slici 8., utjecaj površinskog opterećenja uglavnom raste s povećanjem područja nanošenja. Iznimka je maksimalna

Tablica 2. Maksimalna sila na ležajevima pri točkastom opterećenju

Položaj točkastog opterećenja	Maksimalna reakcija [kN]		Promjena maksimalne sile na ležaju		Promjena smjera maksimalne reakcije [°]	
	Ležaj	Sila	[%]	[kN]		
	1	A, C	38,1	6,42	2,3	0,20
	2	B	40,1	12,01	4,3	0,01
	3	A	39,9	11,45	4,1	2,55
	4	A	39,9	11,45	4,1	0,16
	5	B	39,3	9,78	3,5	0,71
	6	A	39,8	11,17	4,0	2,50
	7	A	38,3	6,98	2,5	0,08

promjena u geometriji kada područje nanošenja obuhvaća čitavu konstrukciju. U tom se slučaju može uočiti mali pad. To se objašnjava činjenicom da se neki dijelovi konstrukcije na koje nije nanoseno opterećenje zapravo podižu, što omogućuje dijelovima na koje je nanoseno opterećenje da se spuste više nego u slučaju kada je čitava konstrukcija zahvaćena opterećenjem, a svi se čvorovi spuštaju s nešto manjim pomakom. U usporedbi s tim površinskim opterećenjima, točkasta opterećenja obično se odlikuju manjim vrijednostima analiziranih parametara. Zanimljivo je napomenuti da najmanje površinsko opterećenje ima istu rezultirajuću silu kao i točkasto opterećenje. Ipak, točkasto opterećenje dovodi do većih promjena kod sva četiri analizirana parametra, ako se usporede s odgovarajućim površinskim opterećenjem. Na osnovi toga možemo zaključiti da je točkasto opterećenje djelotvornije u mijenjanju geometrije membrane, membranskih sila, sila u kabelima i reakcija na ležajevima, ako se usporedi s

istim opterećenjem koje se nanosi kao površinsko opterećenje na malom području. Međutim, stvarno opterećenje snijegom najbolje se predstavlja površinskim opterećenjem za čitavu konstrukciju. To je opterećenje za pedeset puta veće od točkastog opterećenja koje iznosi 1 kN. Ako se usporedi s tim površinskim opterećenjem, točkasto opterećenje ima slične učinke glede maksimalne promjene geometrije i maksimalne promjene membranskih sila, bez obzira na veliku razliku u ukupnom opterećenju. Maksimalna promjena geometrije i maksimalna promjena membranske sile pri točkastom opterećenju događa se točno u točki u kojoj se nanosi točkasto opterećenje. Maksimalne promjene sila u kabelima i reakcija ležajeva odvijaju se drugačije, jer u vezi s ta dva parametra točkasto opterećenje ima mnogo manji učinak nego što je to slučaj kod prostornog većeg površinskog opterećenja. Točkasto opterećenje također minimalno utječe na promjenu smjera reakcija ležajeva.



Slika 8. Maksimalni učinci točkastog opterećenja od 1 kN u usporedbi s prostornim opterećenjem od 0,6 kN/m²



## 4. Zaključak

U ovom se istraživanju analizira numerički model tipične membranske konstrukcije s ciljem utvrđivanja učinaka točkastog opterećenja. U tu svrhu analizirana su četiri različita parametra konstrukcije: maksimalna promjena geometrije, maksimalna promjena membranskih sila, maksimalna promjena sila u kabelima i maksimalna promjena reakcije ležajeva. Svi čvorovi konstrukcije opterećeni su pojedinačno nanošenjem točkastog opterećenja od 1 kN kako bi se utvrdili maksimalni učinci praćenih parametara. Posebno je provedeno i opterećivanje konstrukcije nanošenjem površinskog opterećenja od 0,6 kN/m<sup>2</sup> a radi usporedbe učinaka točkastog i površinskog opterećenja. Rezultati istraživanja pokazuju da točkasto opterećenje bitno utječe na promjenu geometrije i membranskih sila, dok promjene sila u kabelima i reakcije ležajeva nisu značajne ako se usporede s površinskim opterećenjem od 0,6 kN/m<sup>2</sup> kojim je obuhvaćena čitava konstrukcija. Razlog za takvo ponašanje membranskih konstrukcija pri točkastom opterećenju leži u činjenici da se svojstva membrana bitno razlikuju od svojstava ostalih materijala kao što su primjerice čelik i čelični kabeli. Zbog same fleksibilnosti materijala, točkasto opterećenje djeluje na membrane izrazito lokalno, ali je to djelovanje prilično snažno. Membrane se ne odlikuju krutošću na savijanje ili tlak pa preuzimaju vanjska opterećenja promjenom geometrije i promjenom membranskih sila. Međutim, te promjene

geometrije i membranskih sila usko su koncentrirane na mjesto točkastog opterećenja. Kako materijal membrane preuzima velike deformacije te kako točkasto opterećenje nije veliko, tek mali dio sile prenosi se na prednapete kabele, koji podnose točkasto opterećenje mnogo bolje od membrana. Stoga kod sila u kabelima i reakcija ležajeva nema većeg porasta intenziteta niti većih promjena u smjeru reakcije uslijed djelovanja točkastog opterećenja.

Rezultati ovog istraživanja pokazuju da bi bilo korisno dodatno istražiti mogućnost uvođenja točkastog opterećenja u statički proračun. Do sada su se u tom proračunu uzimala u obzir samo površinska opterećenja, a djelovanje točkastog opterećenja često se zanemarivalo. Ovo istraživanje upozorava na nedostatke takvog pristupa tj. na potrebu uključivanja točkastog opterećenja u statički proračun. Vrlo vjerojatno trebat će tijekom tog proračuna pratiti utjecaji točkastog opterećenja, naročito u pogledu promjene geometrije i promjene veličina membranskih sila koje se javljaju uslijed točkastog opterećenja.

## Zahvala

Autori zahvaljuju dr. Pedru Munozu na savjetima i korisnim raspravama te dr. Petru Mitkoviću, dekanu Fakulteta građevinarstva i arhitekture Sveučilišta u Nišu, na svesrdnoj podršci.

## LITERATURA

- [1] Bletzinger, K.U., Wuncker, R., Daoud, F., Camprubi N.: Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194 (2005), pp. 3438-3452, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.12.026>
- [2] Fresl, K., Gidak, P., Vrančić, R.: Generalized minimal nets in form finding of prestressed cable nets, *Građevinar*, 65 (2013) 8, pp. 707-720.
- [3] Brew, J.S., Lewis, W.J.: Spline-based and stress-monitored patterning of fabric structures, *Computers & Structures*, 119 (2013), pp. 203-214, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.11.013>
- [4] Koprivec, Lj., Zbašnjik-Senegačnik, M., Kušar, J.: Uporaba tehničkih tekstila u visokogradnji, *Građevinar*, 58 (2006) 11, pp. 899-907.
- [5] Ambroziak, A., Klosowski, P.: Mechanical properties for preliminary design of structures made from PVC coated fabric, *Construction and Building Materials*, 50 (2014), pp. 74-81, <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2013.08.060>
- [6] Milosevic, V.: Dependence of Membrane Deflection on the Position and Intensity of Point Loads, *Structural Engineering International*, 1 (2015), pp. 20-25, <https://doi.org/10.2749/101686614X14043795570372>
- [7] Selvadurai, A.P.S.: Deflections of a rubber membrane, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 (2006), pp. 1093-1119, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2006.01.001>
- [8] Milosevic, V., Markovic, B., Stojic, D.: Effects of Different Prestress Intensities on the Displacement of Membrane Structures under Point Loads, *Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering*, 14 (2016), pp. 311-318, <http://dx.doi.org/10.2298/FUACE1603311M>
- [9] Milosevic, V., Markovic, B.: Uticaj oblika osnove membranskih konstrukcija na pomeranja pod dejstvom sile, *Tehnika*, LXXI, pp. 187-193, 2016, <http://dx.doi.org/10.5937/tehnika1602187M>
- [10] American Society of Civil Engineers, *Tensile Membrane Structures*, Standards ASCE/SEI 55-10, Structural Engineering Institute, 2010.
- [11] Forster, B., Mollaert, M.: *European Design Guide for Tensile Surface Structures*, TensiNet, Brussels, 2004.
- [12] Sofistik, Version 2012, Sofistik AG, Oberschleissheim, 2012.
- [13] Tsiatas, G.C., Katsikadelis, J.T.: Large deflection analysis of elastic space membranes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65 (2006), pp. 264-294, <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1499>
- [14] Gosling, P.D., Bridgens, B.N., Zhang, L.: Adoption of a reliability approach for membrane structure analysis, *Structural Safety*, 40 (2013), pp. 39-50, <http://dx.doi.org/10.1016/j.strusafe.2012.09.002>
- [15] Bridgens, B., Birchall, M.: Form and Function: The Significance of Material Properties in the Design of Tensile Fabric Structures, *Engineering Structures*, 44 (2012), pp. 1-12, <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.05.044>
- [16] Gosling, P.D., Bridgens, B.N., Albrecht, A.: Analysis and design of membrane structures: Results of a round robin exercise, *Engineering Structures*, 48 (2013), pp. 313-328, <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.10.008>