

Primljen / Received: 12.5.2016.

Ispravljen / Corrected: 19.8.2016.

Prihvaćen / Accepted: 15.12.2016.

Dostupno online / Available online: 10.10.2017.

# Alternativna metoda za analizu izvijanja lameliranih kompozitnih greda

## Autori:



Mr.sc. **Gökhan Özkan**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[gokhanozkn@yahoo.com](mailto:gokhanozkn@yahoo.com)



**Gülçin Tekin**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[gulcintekin@itu.edu.tr](mailto:gulcintekin@itu.edu.tr)



Izv.prof.dr.sc. **Fethi Kadioğlu**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[fkadioglu@itu.edu.tr](mailto:fkadioglu@itu.edu.tr)

Prethodno priopćenje

**Gökhan Özkan, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## Alternativna metoda za analizu izvijanja lameliranih kompozitnih greda

U radu su primjenom Gâteauxove derivacije izvedena dva nova funkcionala kako bi se provela analiza izvijanja simetričnih križno uslojenih ravnih lameliranih kompozitnih greda. Funkcional sadrži četiri nezavisne varijable, a to su progib, rotacija, poprečna sila i moment savijanja za Timošenkovu gredu, te dvije nezavisne varijable, progib i moment savijanja, za Euler-Bernoullijevu gredu. Mogućnost primjene i učinkovitost predložene mješovite formulacije konačnih elemenata prikazana je na nekoliko numeričkih primjera.

### Ključne riječi:

Gâteauxova derivacija, ravne kompozitne grede, mješovita formulacija konačnih elemenata, analiza izvijanja, križno uslojeni lamelirani kompozit

Preliminary note

**Gökhan Özkan, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## An alternative method for analysing buckling of laminated composite beams

In this study, two new functionals are derived based on Gâteaux differential in order to analyse buckling of symmetric cross-ply laminated composite straight beams. The functional comprises four independent variables, i.e. deflection, rotation, shear force and bending moment for Timoshenko beam, and two independent variables, deflection and bending moment, for Euler-Bernoulli beam. The application possibilities and performance of the proposed mixed finite element formulation are presented on several numerical examples.

### Key words:

Gâteaux differential, composite straight beams, mixed finite element formulation, buckling analysis, cross-ply laminated composite

Vorherige Mitteilung

**Gökhan Özkan, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## Alternative Methode zur Auswertung der Durchbiegung von lamellierten Kompositbalken

In der Arbeit wurden anhand der Gâteaux-Ableitung zwei neue Funktionale zur Auswertung der Durchbiegung von geraden lamellierten Kompositbalken aus Kreuzschichtholz abgeleitet. Das Funktional enthält vier unabhängige Variablen: Durchbiegung, Rotation, Querkraft und Biegemoment für den Timoshenko-Balken und zwei unabhängige Variablen, die Durchbiegung und das Drehmoment, für den Euler-Bernoulli-Balken. Die Möglichkeiten der Anwendung und die Effizienz der vorgeschlagenen gemischten Formulierung von finiten Elementen wurden anhand von einigen numerischen Beispielen dargestellt.

### Schlüsselwörter:

Gâteaux-Ableitung, gerade Kompositbalken, gemischte Formulierung von finiten Elementen, Verformungsanalyse, Kreuzschichtlamina

## 1. Uvod

Kompozitni se materijali često koriste u mnogim područjima inženjerstva zbog povoljnih odnosa između čvrstoće i težine te krutosti i težine. Mnogi se znanstvenici bave istraživanjem mehaničkog ponašanja kompozitnih materijala [1-3]. U novije se vrijeme sve više usmjerava na ponašanje lameliranih konstrukcijskih elemenata pri izvijanju. U ovom se radu provodi analiza izvijanja simetričnih križno uslojenih lameliranih kompozitnih greda. U literaturi su dostupni brojni proračunski modeli za analizu izvijanja lameliranih kompozitnih greda. Znanstvenici provode analitičke ili numeričke metode u svrhu pronalazjenja odgovarajućih rješenja. Najčešće korištene numeričke metode su Rayleigh-Ritzova metoda i metoda konačnih elemenata.

Primjenom različitih teorija višeg reda kojima se uzimaju u obzir posmične deformacije greda, autor rada [4] koristi Ritzovu metodu kako bi analizirao izvijanje i titranje križno uslojenih i koso-uslojenih lameliranih kompozitnih greda s različitim rubnim uvjetima. U radovima [5-7] autori koriste metodu dinamičke krutosti u analizi slobodnog titranja i izvijanja osno opterećenih lameliranih kompozitnih greda s proizvoljnim kutovima pružanja slojeva. U radu [8] autori na temelju dvodimenzionalne teorije analiziraju slobodno titranje i izvijanje kompozitnih greda s pomakom između slojeva. U radu [9] prikazano je točno rješenje za poslijekritično stanje te za slobodno titranje simetrično uslojene kompozitne grede za različite rubne uvjete. U radovima [10, 11] autori razvijaju analitička rješenja za slobodno titranje i izvijanje križno uslojenih kompozitnih greda s proizvoljnim rubnim uvjetima, primjenjujući pristup stanje-prostor. U radu [12] za analizu izvijanja anizotropnih sendvič greda predlaže se model s jednim konačnim elementom po visini grede, na temelju teorije višeg reda kojom se uzimaju u obzir posmične deformacije uz pretpostavku nelinearne varijacije polja pomaka. Analitička rješenja za statičku i dinamičku analizu i analizu izvijanja kompozitnih greda predlažu se u radu [13] primjenom Timošenkove teorije greda. U radu [14] prikazana je analiza izvijanja zglobno oslonjenih lameliranih kompozitnih greda koja se temelji na teoriji modificiranih momentnih naprezanja uz primjenu načela minimalne potencijalne energije, uzimajući pritom u obzir Euler-Bernoullijevu i Timošenkovu teoriju greda. Autori u radu [15] uz primjenu teorije višeg reda određuju prirodne frekvencije i naprezanja od izvijanja zglobno oslonjenih lameliranih kompozitnih greda koristeći metodu razvoja komponenti pomaka u redove. Analitička rješenja za slobodno titranje i ponašanje pri izvijanju lameliranih kompozitnih i sendvič greda prikazana su u radu [16]. U radu [17] koristeći poboljšanu teoriju posmičnih deformacija autori analiziraju titranje i izvijanje križno uslojenih kompozitnih greda pomoću metode konačnih elemenata temeljene na pomaku. Izvijanje lamelirane kompozitne grede i ravnih panela analizira se u radu [18] pomoću 1D formulacije konačnih elemenata u okviru unificirane Carrerine formulacije. Titranje i izvijanje kompozitnih

greda s proizvoljnim kutovima pružanja slojeva analiziraju se na temelju teorije posmičnih deformacija u radu [19], a u tu se svrhu primjenjuje metoda konačnih elemenata temeljena na pomaku. U radu [20] autori analiziraju izvijanje dvoslojnih kompozitnih greda pomoću metode konačnih elemenata bazirane na pomaku, koristeći Redyjevju teoriju višeg reda.

Provode se i opsežna istraživanja izvijanja lameliranih kompozitnih greda. Međutim, koliko je autorima ovog rada poznato, do sada nije objavljen niti jedan rad o analizi izvijanja lameliranih kompozitnih greda pomoću mješovite metode konačnih elemenata. U ovom se radu prikazuje primjena djelotvorne i jednostavne metode za analizu izvijanja simetričnih križno uslojenih lameliranih ravnih kompozitnih greda.

U ovom se istraživanju na temelju Euler-Bernoullijeve teorije greda i Timošenkove teorije greda izvode dva nova funkcionala primjenom sustavnog postupka baziranog na Gâteauxovoj derivaciji, a u svrhu analize problema izvijanja simetričnih križno uslojenih ravnih greda. U nastavku se navode neke od prednosti pristupa baziranog na Gâteauxovoj derivaciji koji je prvi put korišten u radu [21]:

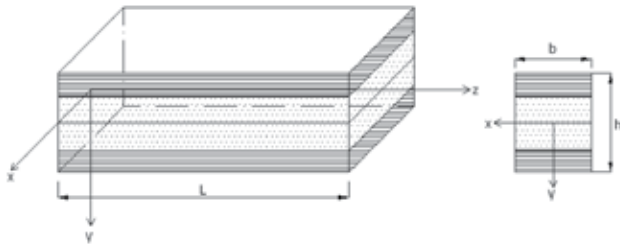
- Sve diferencijalne jednadžbe mogu se sustavno izraziti funkcionalom
- Lako se mogu odrediti rubni uvjeti problema
- Diferencijalne jednadžbe mogu se provjeriti ispitivanjem potencijala
- Razvijenim kombiniranim elementom u potpunosti se može eliminirati pojava *shear locking*.

U radu [22] autori analiziraju slobodno titranje lameliranih kompozitnih zakrivljenih greda koristeći Gâteauxovu derivaciju. U radovima [23, 24] analizira se i titranje vibriranje križno uslojenih i koso uslojenih kompozitnih greda. Osim toga, ovu su učinkovitu metodu nedavno koristili i autori rada [25] u analizi križno uslojenih debelih kompozitnih ploča.

U ovom su istraživanju formilirani novi konačni elementi mješovitog tipa. Konačni element Timošenkove grede ima dva čvora i četiri stupnja slobode po čvoru, a konačni element Euler-Bernoullijeve grede ima dva čvora i dva stupnja slobode po čvoru. Razvijen je program temeljen na metodi konačnih elemenata, te je primjenom predloženog programa provedena analiza izvijanja simetričnih križno uslojenih lameliranih kompozitnih greda za razne rubne uvjete, varijante slojeva (poput orijentacije i rasporeda slojeva), geometrijska svojstva i svojstva materijala. Valjanost prikazane mješovite formulacije metode konačnih elemenata dokazana je usporedbom rezultata s dostupnim podacima iz literature. Numeričkom je usporedbom utvrđeno da se rezultati ovog ispitivanja dobro podudaraju s rezultatima objavljenima u relevantnoj literaturi.

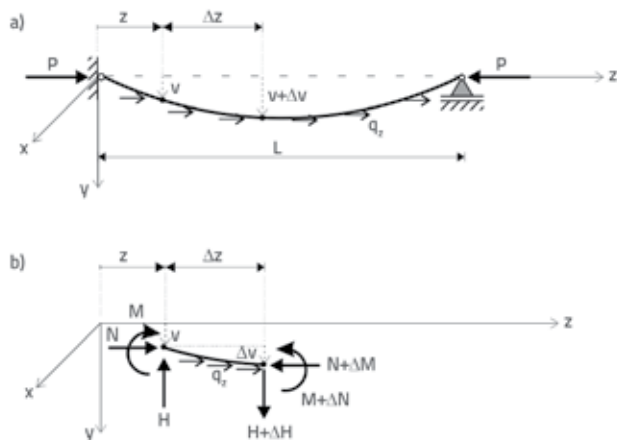
## 2. Diferencijalne jednadžbe i funkcional

Slika 1. prikazuje simetričnu lameliranu ravnu kompozitnu gredu u Kartezijevom koordinatnom sustavu, omeđenu osima  $xyz$ , s oznakama duljine  $L$ , debljine  $h$  i širine  $b$ .



Slika 1. Geometrija ravne simetrične lamelirane grede

Razmotrimo primjer jednoliko opterećenog štapa s pozitivnim smjerovima unutarnjih sila kako je prikazano na slici 2., gdje je  $q_z$  jednoliko raspoređeno uzdužno opterećenje, N je uzdužna sila, H je horizontalna sila, a M je moment savijanja.



Slika 2: a) Početno ravno stanje i izvijeno stanje štapa; b) Slobodni odsječak štapa

Ako usvojimo pretpostavku Euler-Bernoullijeve teorije greda, tada se jednačba ravnoteže momenta na gornjem kraju štapa, za slučaj da je  $q_z$  jednak nuli, može dobiti kako slijedi,

$$\frac{d^2M}{dz^2} = N \frac{d^2v}{dz^2} \quad (1)$$

a moment savijanja postaje:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{D_x} \quad (2)$$

gdje je v pomak duž osi y, a  $D_x$  je krutost greda na savijanje, što je izraženo na sljedeći način:

$$D_x = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^{(k)} I^{(k)} \quad (3)$$

Prema Timošenkovoju teoriji greda, diferencijalne jednačbe mogu se iskazati kako slijedi:

$$-N \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{dT}{dz} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dM}{dz} - T = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{d\Omega}{dz} + \frac{M}{D_x} = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{dv}{dz} - \Omega + \frac{T}{C_y} = 0 \quad (7)$$

gdje je T poprečna sila,  $\Omega$  je rotacija poprečnog presjeka oko osi x, a  $C_y$  je posmična krutost grede koja se izražava na sljedeći način:

$$C_y = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{66}^{(k)} A^{(k)} \quad (8)$$

U izrazima (3) i (8), k predstavlja broj slojeva, I je moment inercije, a A je deformirana površina poprečnog presjeka. Element transformirane reducirane matrice krutosti  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ , nekog sloja u koordinatnom sustavu materijala dobiva se kako slijedi:

$$\bar{Q}_{11} = C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \quad (9)$$

$$\bar{Q}_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

gdje je  $\theta$  kut između globalne osi i lokalne osi svakog sloja, a vrijednost kuta  $\theta$  iznosi  $0^\circ$  ili  $90^\circ$  za križno uslojeni laminat.  $C_{ij}$  je krutost sloja koja se izražava pomoću inženjerske konstante k-tog sloja kao:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (10)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (11)$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (12)$$

$$C_{66} = G_{12} \quad (13)$$

gdje je  $E_i$  Young-ov modul u  $i^{\text{om}}$  smjeru materijala,  $G_{ij}$  je modul posmika ravnine i-j, a  $\nu_{ij}$  je Poisson-ov koeficijent. Prirodni rubni uvjeti dani su izrazom (14), a geometrijski rubni uvjeti izrazom (15).

$$-H = -\hat{H} \quad (14)$$

$$-M = -\hat{M}$$

$$v = \hat{v} \quad (15)$$

$$\Omega = \hat{\Omega}$$

U izrazima (14) i (15), veličine s "kapićom" su vrijednosti na rubu, dok su veličine bez kape nepoznate.

Zatim se diferencijalne jednačbe iskazuju pomoću operatora  $Q = Lu - f$ , gdje  $L$  predstavlja matricu koeficijenta,  $u$  predstavlja nepoznate vektore ( $u = \{v, M\}$  za Euler-Bernoullijeve grede, a  $u = \{v, \Omega, T, M\}$  za Timošenkovske grede), a  $f$  predstavlja vektor opterećenja. Potreban i dovoljan uvjet da bi operator  $Q$  postao potencijal iskazan je u [26]. Nakon što se zadovolji zahtjev potencijala, funkcional odgovara diferencijalnim jednačbama i može se izraziti kako slijedi:

$$I(u) = \int_0^1 \langle Q(su), u \rangle ds \tag{16}$$

Ovdje je vrijednost  $s$  skalar, a zagrade  $\langle, \rangle$  označavaju skalarni umnožak. Ako promatramo diferencijalne jednačbe kao za ravnu lameliranu kompozitnu Euler-Bernoullijevu gredu s rubnim uvjetima, tada se matični oblik jednačbe (16) može prikazati na sljedeći način:

$$I(u) = \int_0^1 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} -N \frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} & 0 & \frac{1}{D_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} sv \\ s\Omega \\ sM \\ sT \\ sv \\ s\Omega \\ sM \\ sH \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{H} \\ -\hat{M} \\ \hat{\Omega} \\ \hat{v} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} v \\ M \\ 0 \\ 0 \\ v \\ \Omega \\ M \\ H \end{array} \right] \end{array} ds$$

Nakon primjene jednačbe (16), može se izvesti sljedeći izraz:

$$I(u) = \int_0^1 \left( \begin{array}{l} -Nsv''v + sM'v + sv''M + \frac{1}{D_x} sMM - sHv + \hat{H}v - sM\Omega + \hat{M}\Omega \\ + s\Omega M - \hat{\Omega}M + svH - \hat{v}H \end{array} \right) ds$$

Nakon integracije i pojednostavljenja, dobiva se eksplicitni oblik funkcionala koji odgovara diferencijalnim jednačbama ravne lamelirane kompozitne Euler-Bernoullijeve grede:

$$I(u) = \frac{1}{2} [Nv', v'] + \frac{1}{2D_x} [M, M] - [M', v'] + [\hat{H}, v]_{\sigma} + [v', M]_{\sigma} - [\hat{M}, v']_{\sigma} + [v', M]_{\epsilon} - [\hat{v}, H]_{\epsilon} + [H, v]_{\epsilon} \tag{17}$$

gdje je  $[.]$  skalarni umnožak koji se definira kao  $[f, g] = \int fgdA$ . Zagrade s indeksima  $\epsilon$  i  $\sigma$  označavaju geometrijske i prirodne

rubne uvjete. Simbol ( $'$ ) predstavlja prvu derivaciju. Isti matematički postupak (tj. postupak primijenjen za funkcional Euler-Bernoullijeve grede) ponavlja se za derivaciju funkcionala koji odgovara ravnim lameliranim kompozitnim Timošenkovskim gredama. Radi jednostavnosti, u ovom se radu ne prikazuje detaljni postupak za izvođenje funkcionala Timošenkovskih greda, a čitatelji koje taj postupak zanima upućuju se na rad [27]. Eksplicitni izraz funkcionala za ravne lamelirane kompozitne Timošenkovske grede može se dobiti na sličan način, i to kako slijedi:

$$I(u) = \frac{1}{2} [Nv', v'] + \frac{1}{2D_x} [M, M] + \frac{1}{2C_y} [T, T] - [T, \Omega] - [M, \Omega'] - [v', T] + [\Omega, \hat{M}]_{\sigma} + [v, \hat{H}]_{\sigma} + [M, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\epsilon} + [H, (v - \hat{v})]_{\epsilon} \tag{18}$$

### 3. Formulacija konačnih elemenata

Ako se jednodimenzionalni element s funkcijom oblika koristi na sljedeći način:

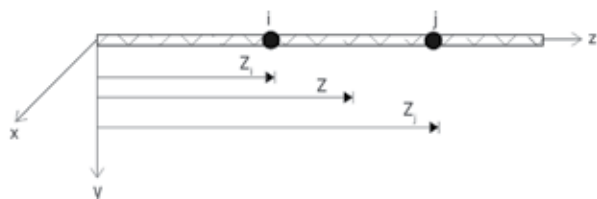
$$\Psi_i = \frac{z_j - z}{L_e} \tag{19}$$

$$\Psi_j = \frac{z - z_i}{L_e}$$

gdje su usvojene oznake prikazane na slici 3., i gdje  $L_e$  predstavlja duljinu elementa ( $L_e = z_j - z_i$ ), tada su sve nepoznate varijable funkcionala iz izraza (17) za Euler-Bernoullijeve grede iskazane u vidu interpolacijskih funkcija kako slijedi:

$$v = v_i \Psi_i + v_j \Psi_j \tag{20}$$

$$M = M_i \Psi_i + M_j \Psi_j \tag{21}$$



Slika 3. Jednodimenzionalni element s dva čvora

Nakon što se odrede ekstremi funkcionala u odnosu na varijable čvorova, pristupa se izvođenju matrice elementa prema izrazu (22):

$$\begin{bmatrix} \frac{N}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & -\frac{N}{L_e} & \frac{1}{L_e} \\ -\frac{1}{L_e} & \frac{L_e}{3D_x} & \frac{1}{L_e} & \frac{L_e}{6D_x} \\ -\frac{N}{L_e} & \frac{1}{L_e} & \frac{N}{L_e} & -\frac{1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} & \frac{L_e}{6D_x} & -\frac{1}{L_e} & \frac{L_e}{3D_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ M_i \\ v_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Sve nepoznate varijable funkcionala iskazane u jednadžbi (18) za Timošenkovu gredu izražavaju se pomoću funkcija oblika kako slijedi:

$$v = v_i \Psi_i + v_j \Psi_j \quad (23)$$

$$\Omega = \Omega_i \Psi_i + \Omega_j \Psi_j \quad (24)$$

$$M = M_i \Psi_i + M_j \Psi_j \quad (25)$$

$$T = T_i \Psi_i + T_j \Psi_j \quad (26)$$

Nakon što se odrede ekstremi funkcionala u odnosu na varijable čvora, dobiva se sljedeća matrica elemenata Timošenkovu grede:

$$(27) \quad \begin{bmatrix} \frac{N}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{N}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L_e}{3D_x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{6D_x} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & \frac{L_e}{3C_y} & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & \frac{L_e}{6C_y} \\ -\frac{N}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{N}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L_e}{6D_x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{3D_x} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6} & 0 & \frac{L_e}{6C_y} & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3} & 0 & \frac{L_e}{3C_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \Omega_i \\ M_i \\ T_i \\ v_j \\ \Omega_j \\ M_j \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 4. Analiza izvijanja

Postoji i alternativni način rješavanja problema izvijanja:

$$(28) \quad \left( \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - P_{cr} \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_g] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

gdje  $\{F\}$  definira vektor rezultirajućih naprezanja,  $\{v\}$  označava vektor pomaka,  $[K]$  je matrica sustava, a  $[K_g]$  je geometrijska matrica sustava. Ako se iz izraza (28) izbaci  $\{F\}$ , dobiva se izraz:

$$(29) \quad ([K^*] - P_{cr} [K_g]) \{v\} = \{0\}$$

gdje se  $P_{cr}$  definira kao kritično opterećenje izvijanja a  $[K^*]$  označava reduciranu matricu sustava za dotični problem:

$$(30) \quad [K^*] = [K_{22}] - [K_{21}] [K_{11}]^{-1} [K_{12}]$$

Svojtvene vrijednosti,  $P_{cr}$  za koje je determinanta matrice koeficijentata iz izraza (29) jednaka nuli, dovode do kritičnih opterećenja izvijanjem.

#### 5. Numerički primjeri

##### Primjer 1: Lamelirana kompozitna Euler-Bernoullijeva greda

Razmatra se simetrična križno uslojena lamelirana kompozitna greda s različitim brojem slojeva jednake debljine.

Svojstva materijala su kako slijedi:

$$E_1 = 155 \text{ GPa}, E_2 = 12,1 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0,248, G_{12} = 4,4 \text{ GPa}$$

Podaci vezani za gredu:

Duljina:  $L = 0,25 \text{ m}$

Širina:  $b = 0,01 \text{ m}$

Visina grede:  $h = 0,001 \text{ m}$ .

Gredu karakterizira dvadeset štapnih konačnih elemenata jednake duljine.

Za ispitivanje predložene metode koriste se razni numerički primjeri. Prva tri oblika izvijanja (izraženo u njutnu "N"),  $P_{cr1}$ ,  $P_{cr2}$  i  $P_{cr3}$  uspoređuju se s odgovarajućim vrijednostima iz literature [9], a ta je usporedba prikazana u tablicama 1. do 3. za razne rubne uvjete. Iz tablica 1. do 3. može se vidjeti da su rezultati dobiveni u ovom istraživanju podudarni s podacima iz literature, pa se stoga može zaključiti da je metodologija prikazana u ovom radu pouzdana. Uspoređujući tablice 1.

Tablica 1. Kritične sile izvijanja (u [N]) simetrične lamelirane kompozitne zglobno oslonjene grede

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)
	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje
$P_{cr1}$	20,438	20,495	1,595	1,599	18,086
$P_{cr2}$	82,261	81,982	6,421	6,399	72,784
$P_{cr3}$	186,996	184,460	14,597	14,399	165,447
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)	(0°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]
$P_{cr1}$	3,954	14,847	14,896	2,292	2,299
$P_{cr2}$	15,901	59,789	59,587	9,230	9,199
$P_{cr3}$	36,147	135,913	134,072	20,982	20,698

Tablica 2. Kritične sile izvijanja (u [N]) simetrične lamelirane kompozitne obostrano upete grede

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)
	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje
$P_{cr1}$	82,266	81,982	6,421	6,399	72,776
$P_{cr2}$	169,733	167,715	13,249	13,092	150,173
$P_{cr3}$	337,227	327,929	26,325	25,599	298,366
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)	(0°/90°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]
$P_{cr1}$	15,903	59,777	59,587	9,228	9,199
$P_{cr2}$	32,81	123,364	121,901	19,045	18,819
$P_{cr3}$	65,187	245,105	238,350	37,840	36,797

Tablica 3. Kritične sile izvijanja (u [N]) simetrične lamelirane kompozitne grede s jednim upetim, a drugim zglobnim spojem

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)
	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje
$P_{cr1}$	41,899	41,928	3,271	3,273	37,077
$P_{cr2}$	124,88	123,933	9,748	9,674	110,483
$P_{cr3}$	251,869	246,912	19,661	19,275	222,844
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)	(0°/90°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	ovo istraživanje	istraživanje [9]	ovo istraživanje	istraživanje [9]
$P_{cr1}$	8,103	30,445	30,475	4,700	4,704
$P_{cr2}$	24,139	90,761	90,078	14,012	13,906
$P_{cr3}$	48,687	183,064	179,464	28,262	27,706

do 3. možemo vidjeti da su kritične sile izvijanja najmanje za zglobno oslonjenu gredu, a najveće za obostrano upetu gredu. Vrijednosti sila izvijanja greda sa smjerom pružanja vlakana u sloju (0°), (0° / 90° / 90° / 0°) i (0° / 90° / 90° / 90° / 90° / 0°) izuzetno su visoke u usporedbi s gredama (90°), (90° / 0° / 0° / 90°) i (90° / 90° / 0° / 0° / 90° / 90°).

### Primjer 2: Lamelirana kompozitna Euler-Bernoullijeva greda

Razmatra se simetrična križno uslojena lamelirana kompozitna greda s različitim brojem slojeva jednake debljine.

Svojstva materijala su kako slijedi:

$$E_1/E_2 = 25, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0,5E_2, G_{23} = 0,2E_2, \nu_{12} = 0,25.$$

Podaci vezani za gredu:

Duljina:  $L = 10$  m

Širina:  $b = 1$  m

Visina grede:  $h = 1$  m.

Greda je podijeljena na dvadeset konačnih elemenata jednake duljine. U ovom se primjeru bezdimenzijske kritične sile izvijanja za prva tri oblika uspoređuju s odgovarajućim

Tablica 4. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) za simetričnu lameliranu gredu - rubni uvjeti H-H

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]
$\bar{P}_{cr1}$	20,580	20,562	0,824	0,822	18,142	18,127
$\bar{P}_{cr2}$	82,923	-	3,317	-	72,974	-
$\bar{P}_{cr3}$	188,504	-	7,540	-	165,884	-
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)		(0°/90°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]
$\bar{P}_{cr1}$	3,293	3,296	14,735	-	6,690	-
$\bar{P}_{cr2}$	13,267	-	59,337	-	26,905	-
$\bar{P}_{cr3}$	30,160	-	134,885	-	61,159	-

Tablica 5. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) za simetričnu lameliranu gredu - rubni uvjeti C-C

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]
$\bar{P}_{cr1}$	82,904	82,247	3,317	3,290	72,989	72,507
$\bar{P}_{cr2}$	171,096	-	6,844	-	150,57	-
$\bar{P}_{cr3}$	339,941	-	13,597	-	299,153	-
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)		(0°/90°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje		ovo istraživanje	
$\bar{P}_{cr1}$	13,265	13,183	59,335		26,905	
$\bar{P}_{cr2}$	27,376	-	122,434		55,513	
$\bar{P}_{cr3}$	54,391	-	243,251		110,293	

 Tablica 6. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) za simetričnu lameliranu gredu - rubni uvjeti C-F

Oblik izvijanja	(0°)		(90°)		(0°/90°/90°/0°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]
$\bar{P}_{cr1}$	5,134	5,140	0,206	0,205	4,505	4,532
$\bar{P}_{cr2}$	46,45	-	1,859	-	40,913	-
$\bar{P}_{cr3}$	130,161	-	5,206	-	114,554	-
Oblik izvijanja	(90°/0°/0°/90°)		(0°/90°/90°/90°/90°/0°)		(90°/90°/0°/0°/90°/90°)	
	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje		ovo istraživanje	
$\bar{P}_{cr1}$	0,822	0,824	3,671		1,675	
$\bar{P}_{cr2}$	7,433	-	33,239		15,084	
$\bar{P}_{cr3}$	20,825	-	93,139		42,233	

podacima iz literature [2]. Jednadžba bezdimenzijske kritične sile izvijanja je:

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{b E_2 h^3} \quad (31)$$

Tablice 4. do 6. prikazuju bezdimenzijske kritične sile izvijanja za sljedeće rubne uvjete: zglob-zglob (H-H), upeto-upeto (C-C) i upeto – slobodni rub (C-F). Prikazano je šest tipova uslojenosti. Kao što se može vidjeti iz tablica, ovim se modelom postižu rezultati koji su u skladu s rezultatima prikazanim u radu [2].

### Primjer 3: Lamelirana kompozitna Euler-Bernoullijeva greda

U ovom se primjeru razmatraju tri simetrične križno uslojene lamelirane kompozitne grede s četiri sloja (0°/90°/90°/0°) iste debljine. U nastavku se prikazuju svojstva poprečnog presjeka greda sa zglobnim krajevima: duljina grede iznosi  $L = 10$  m, širina grede iznosi  $b = 1$  m, a visina grede iznosi  $h = 1$  m.

U tablici 7. prikazani su različiti materijali lameliranih kompozitnih greda kako bi se analizirala svojstva materijala pri kritičnoj sili izvijanja i to za prva tri oblika. U tablici 8. prikazana je bezdimenzijska kritična sila izvijanja lameliranih kompozitnih Euler-Bernoullijevih greda sa slojevima (0° / 90° / 90° / 0°).

Tablica 7. Svojstva materijala

	$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$
Grafit/epoksidna smola (Grap)	181	10,3	7,17	3,433	0,28
Kevlar/epoksidna smola (Kev)	76	5,56	2,3	1,618	0,34

**Tablica 8. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) simetrične križno uslojene Euler-Bernoullijeve grede ( $0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) za razna svojstva materijala**

	Kev/Kev/Kev/Kev	Kev/Grp/Grp/Kev	Grp/Kev/Kev/Grp
$\bar{P}_{cr1}$	159,547	161,049	377,015
$\bar{P}_{cr2}$	641,419	647,066	1518,304
$\bar{P}_{cr3}$	1458,035	1470,891	3451,526

Usporedivši vrijednosti iz tablice 8. možemo uočiti da simetrična križno uslojena lamelirana greda ( $0^\circ$  grafit /  $90^\circ$  Kevlar /  $90^\circ$  Kevlar /  $0^\circ$  grafit) ima najveću kritičnu silu izvijanja, dok greda ( $0^\circ$  Kevlar /  $90^\circ$  Kevlar /  $90^\circ$  Kevlar /  $0^\circ$  Kevlar) ima najmanju kritičnu silu izvijanja.

**Primjer 4: Lamelirana kompozitna Timošenkova greda**

U ovom se primjeru razmatraju križno uslojene Timošenkove grede sa sljedećim rasporedom slojevima ( $0^\circ$ ), ( $90^\circ$ ) i ( $90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$ ).

Svojstva materijala su sljedeća:

$$E_1/E_2 = 25, E_2 = E_3, G_{12} = G_{13} = 0,5E_2, G_{23} = 0,2E_2, \nu_{12} = 0,25.$$

Podaci vezani za gredu:

Duljina:  $L = 10$  m

Širina:  $b = 1$  m

Visina grede:  $h = 1$  m.

Greda je modelirana s dvadeset konačnih elemenata jednake duljine.

U ovom se primjeru ispituje metoda predložena u ovom istraživanju za Timošenkovu gredu. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja simetrične križno uslojene grede pri raznim rubnim uvjetima uspoređuje se sa silama dobivenim u drugim istraživanjima. Usporedba rezultata prikazana je u Tablici 9. Iz tablice 9. može se vidjeti da su rezultati dobiveni u ovom istraživanju podudarni s podacima iz literature, pa se stoga može zaključiti da je metodologija prikazana u ovom radu pouzdana. Kod konzolne grede, zabilježena je najmanja kritična sila izvijanja u usporedbi s rubnim uvjetima C-C i H-H.

**Primjer 5: Lamelirana kompozitna Timošenkova greda**

U ovom se primjeru razmatra bezdimenzijska kritična sila izvijanja simetrične križno uslojene grede ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) za razne

omjere duljine i visine  $L/h = 5$  i  $L/h = 10$ . Greda je podijeljena na 20 konačnih elemenata iste duljine. Odgovarajući parametri materijala su:

$$E_1/E_2 = 40, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0,6E_2, G_{23} = 0,5E_2, \nu_{12} = 0,25.$$

Bezdimenzijska kritična sila izvijanja križno uslojene grede pri raznim rubnim uvjetima uspoređuje se u tablici 10. sa silama dobivenim u istraživanju [11]. Iz te se tablice može vidjeti da su rezultati postignuti u okviru ovog istraživanja u skladu s rezultatima iskazanima u literaturi. Osim toga, kao što se moglo i očekivati, kritična sila izvijanja lamelirane grede povećava se s povećanjem odnosa duljine prema visini. Nadalje, kod grede s C-F zabilježena je najmanja kritična sila izvijanja dok je kod grede s C-C zabilježena najveća kritična sila izvijanja.

**Tablica 10. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) simetrične križno uslojene grede ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) za razne omjere  $L/h$**

$L/h$	Rubni uvjet	$(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	
		ovo istraživanje	istraživanje [11]
5	H-H	8,588	8,606
	C-H	9,386	9,412
	C-C	10,752	10,802
	C-F	4,821	4,747
10	H-H	18,932	18,989
	C-H	25,840	25,940
	C-C	34,845	34,426
	C-F	6,793	6,797

**6. Zaključak**

U radu je provedena analiza izvijanja simetričnih križno uslojenih kompozitnih greda pomoću mješovite metode konačnih elemenata. Primjenjuju se dvije različite teorije greda: Euler-Bernoullijeva teorija lameliranih kompozitnih greda i Timošenkova teorija lameliranih kompozitnih greda. Primjenom Gâteauxove derivacije, izvedena su dva nova funkcionala za analizu izvijanja simetričnih križno uslojenih kompozitnih Euler-Bernoullijevih i Timošenkovih greda. Primjenom novorazvijene formulacije konačnih elemenata, razmatraju se primjeri simetričnih križno uslojenih kompozitnih greda s različitim

**Tablica 9. Bezdimenzijska kritična sila izvijanja ( $\bar{P}_{cr}$ ) simetrične križno uslojene grede  $L/h = 10$  pri različitim rubnim uvjetima**

$L/h$	Rubni uvjet	$(0^\circ)$		$(90^\circ)$		$(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$	
		ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]	ovo istraživanje	istraživanje [2]
10	H-H	13,739	13,768	0,782	0,784	11,889	11,179
	C-C	27,359	27,656	2,727	2,747	20,940	20,800
	C-F	4,666	4,576	0,267	0,203	4,770	3,922



brojem slojeva kako bi se numerički ocijenili utjecaji različitih teorija greda, variranja geometrijskih i materijalnih parametara, te rubnih uvjeta, na kritičnu silu izvijanja. Usporedbom rezultata dobivenih u ovom istraživanju s rezultatima iz literature ustanovljeno je njihovo dobro podudaranje. Rezultati dobiveni na temelju numeričkih primjera upućuju na valjanost i djelotvornost prikazane formulacije. Iz istraživanja se mogu izvući sljedeći zaključci:

- Precjenjivanje krutosti greda kod analize na temelju Euler-Bernoullijeve teorije greda uzrokuje veću kritičnu silu izvijanja nego što je to slučaj kod Timošenkovke teorije greda.
- Kod iste vrste uslojavanja ( $0^\circ$ ), ( $90^\circ$ ) i ( $90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ) ustanovljena je najveća kritična sila izvijanja kod lameliranih Euler-Bernoullijevih i Timošenkovih greda s obostrano upetim krajevima u odnosu na ostale uvjete oslanjanja.
- Razlika između kritičnih sila izvijanja određenih na temelju Euler-Bernoullijeve i Timošenkovke teorije greda smanjuje se s porastom odnosa između duljine i visine grede.
- Kritična sila izvijanja kod simetrične lamelirane Euler-Bernoullijeve grede razlikuje se od sile za Timošenkovu gredu, a razlika između vrijednosti tih dviju teorija značajnija je kod grede s uslojenošću ( $90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ).
- Razmatrajući četiri tipa uslojenosti, tj. ( $0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ), ( $0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ), ( $90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ), i ( $90^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 90^\circ$ ), dokazano je da je krutost simetrične lamelirane Euler-Bernoullijeve grede s uslojenošću od ( $0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) ili ( $0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) veća od odgovarajuće vrijednosti za uslojenost ( $90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ$ ) ili ( $90^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 90^\circ$ ).
- U ovom je istraživanju razvijena mješovita formulacija konačnih elemenata u svrhu analize izvijanja simetričnih križno uslojenih ravnih kompozitnih Euler-Bernoullijevih i Timošenkovih greda, pri čemu se koriste novi funkcionali prema sustavnom postupku temeljenom na Gâteauxovoj derivaciji.
- Pristup utemeljen na Gâteauxovoj derivaciji pouzdan je i lako provediv, a odgovarajući rezultati dovoljno su točni za inženjerske potrebe (tj. ovim se pristupom mogu izravno predvidjeti pomaci i unutarnje sile, bez primjene matematičkih operacija). Isti se postupak može primijeniti na analizu izvijanja i titranje križno uslojenih i/ili koso uslojenih kompozitnih greda, razmatrajući teorije višeg reda za uzimanje u obzir posmičnih deformacija. Neki od spomenutih problema upravo se istražuju na temelju metodologije prikazane u ovom radu.

## LITERATURA

- [1] Jones, M.R.: *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, 1999.
- [2] Reddy, J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second edition, CRC Press, 2004.
- [3] Kaw, A.K.: *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, 2006.
- [4] Aydođdu, M.: Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *Composites Science and Technology*, 66 (2006), pp. 248–1255, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.10.029>
- [5] Jun, L., Hongxing, H., Rongying, S.: Dynamic stiffness analysis for free vibrations of axially loaded laminated composite beams, *Composite Structures*, 84 (2008), pp. 87–98, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.007>
- [6] Jun, L., Xiaobin, L., Hongxing, H.: Free vibration analysis of third-order shear deformable composite beams using dynamic stiffness method, *Archive of Applied Mechanics*, 79 (2009), pp. 1083–1098, <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0276-8>
- [7] Jun, L., Hongxing, H.: Free vibration analyses of axially loaded laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory, *Meccanica*, 46 (2011), pp. 1299–1317, <https://doi.org/10.1007/s11012-010-9388-7>
- [8] Xu, R., Wu, Y.: Free vibration and buckling of composite beams with interlayer slip by two-dimensional theory, *Journal of Sound and Vibration*, 313 (2008), pp. 875–890, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.12.029>
- [9] Emam, S.A., Nayfeh, A.H.: Postbuckling and free vibrations of composite beams, *Composite Structure*, 88 (2009), pp. 636–642, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.06.006>
- [10] Khdeir, A.A., Reddy, J.N.: Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *International Journal of Engineering Science*, 32 (1994) 12, pp. 1971–1980, [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)90093-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90093-0)
- [11] Khdeir, A.A., Reddy, J.N.: Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *Composite Structures*, 37 (1997) 1, pp. 1–3, [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00048-2)
- [12] Loja, M.A.R., Barbosa, J.I., Soares, C.M.M.: Buckling behavior of laminated beam structures using a higher-order discrete model, *Composite Structures*, 38 (1997) 1–4, pp. 119–131, [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)80011-1](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)80011-1)
- [13] Xu, R., Wu, Y.: Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 (2007) 10, pp. 1139–1155, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.02.006>
- [14] Abadi, M.M., Daneshmehr, A.R.: An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler–Bernoulli and Timoshenko beams, *International Journal of Engineering Science*, 75 (2014), pp. 40–53, <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2013.11.009>
- [15] Matsunaga, H.: Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories, *Journal of Sound and Vibration*, 246 (2001), pp. 47–62, <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3627>

- [16] Zhen, W., Wanji, C.: An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams, *Composite Structures*, 84 (2008) 4, pp. 337-349, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.10.005>
- [17] Vo, T., Inam, F.: Vibration and buckling of cross-ply composite beams using refined shear deformation theory, 2<sup>nd</sup> International Conference on Advanced Composite Materials and Technologies for Aerospace Applications, UK, 2012.
- [18] Ibrahim, S.M., Carrera, E., Petrolo, M., Zappino, E.: Buckling of composite thin walled beams by refined theory, *Composite Structures*, 94 (2012) 2, pp. 563-570, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.020>
- [19] Vo, T.P., Thai, H-T.: Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62 (2012) 1, pp. 67-76, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.06.001>
- [20] He, G., Yang, X.: Finite element analysis for buckling of two-layer composite beams using Reddy's higher order beam theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, 83 (2014), pp. 49-57, <https://doi.org/10.1016/j.finel.2014.01.004>
- [21] Aköz, A.Y.: A new functional for bars and its applications, 4<sup>th</sup> National Applied Mechanics Meeting, Turkey, 1985.
- [22] Kadioğlu, F., İyidogan, C.: Free vibration of laminated composite curved beams using mixed finite element formulation, *Science and Engineering of Composite Materials*, 16 (2009) 4, pp. 247-257, <https://doi.org/10.1515/SECM.2009.16.4.247>
- [232] Özütok, A., Madenci, E.: Free vibration analysis of cross-ply laminated composite beams by using mixed finite element formulation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13 (2013) 2, 1250056-17, <https://doi.org/10.1142/S0219455412500563>
- [24] Özütok, A., Madenci, E., Kadioğlu, F.: Free vibration analysis of angle-ply laminate composite beams by mixed finite element formulation using the Gâteaux differential, *Science and Engineering of Composite Materials*, 21 (2014) 2, pp. 257-266, <https://doi.org/10.1515/secm-2013-0043>
- [25] Ateş, N., Tekin, G., Kadioğlu, F.: Alternative Solution for Cross-ply Laminated Composite Thick Plates, *Građevinar*, Accepted, 2016.
- [26] Oden, J.T. Reddy, J.N.: Variational methods in theoretical mechanics, Springer, Berlin, 1976, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-96312-4>
- [27] Özkan, G.: Buckling analysis of cross-ply laminated composite straight beams, M.Sc. Dissertation, Department of Civil Engineering. Istanbul Technical University, Istanbul, 2011.